NIE-SENTRALE MEERVERANDERLIKE BETA-VERDELINGS.

deur

DANIËL JACOBUS DE WAAL

PROEFSKRIF

Voorgelê ter vervulling van die Vereistes
vir die Graad DOCTOR PHILOSOPHIAE
in die Departement

WISKUNDIGE STATISTIEK,
UNIVERSITEIT KAAPSTAD,
KAAPSTAD.

Oktober 1968.

PROMOTOR: PROF. DR. C.G. TROSKIE

AAN V E R E N A.

D A N K B E T U I G I N G.

Hiermee betuig ek my hartlike dank aan Prof. dr. C.G. TROSKIE van die Departement Wiskundige Statistiek, Universiteit Kaapstad, vir die voorstel van hierdie onderwerp en vir die leiding en aanmoediging by die voltooiing van hierdie proefskrif.

Die hartlike samewerking van Prof. A. Reitsma en Mnre. J.H. Oosthuizen en G.P. Viljoen in die Departement Statistiek, Universiteit van die O.V.S., word baie waardeer.

Aan die Universiteit van die O.V.S. my dank vir 'n finansieële toekenning waarsonder die berekenings nie uitgevoer kon word nie. My dank ook aan die W.N.N.R. en Universiteit Kaapstad vir finansiële hulp verleen.

I N H O U D.

ENKELE NOTASIES.

Tensy waar anders vermeld, word skalar-veranderlikes aangedui deur klein-letters en matriks-veranderlikes deur hoof-letters.

A en B	: Wishart-veranderlikes.
$\lvert A \rvert$	: determinant van A.
spA	: spoor van A.
espA	: eksponent(spA).
A'	: transponent van A.

$$\text{diag}(a_1,\text{--},a_p) = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & - - - & 0 \\ 0 & a_2 & - - - & 0 \\ - & - & - - - & - \\ 0 & 0 & - - - & a_p \end{pmatrix}$$

I	: identiteits matriks.
$\sim$	: verdeel is soos.
$\propto$	: is proporsioneel tot.

Laat $A = TT'$, dan $A^{1/2} = T$ waar T 'n onderdriehoekige matriks is met diagonaal-elemente positief.

$A^{1/2}BA^{1/2} = A^{1/2}B(A^{1/2})'$.

HOOFSTUK I.

INLEIDING.

1.1 Inleiding en opsomming.

Veronderstel x en y is twee onafhanklike χ^2-veranderlikes met m en n grade van vryheid respektiewelik. Die volgende verdelings is nou geen onbekendes in die statistiek nie:

Die verdeling van

$$u = x/(x+y)$$

is 'n beta van die eerste soort en die verdelingsfunksie word gegee deur

$$\beta_1(u\ ;\ m/2\ ,\ n/2) = \Gamma((m+n)/2)/(\Gamma(m/2)\Gamma(n/2))u^{m/2\ -1}(1-u)^{n/2\ -1},\quad 0<u<1.$$

Die verdeling van

$$v = x/y$$

is 'n beta van die tweede soort en die verdelingsfunksie word gegee deur

$$\beta_2(v\ ;\ m/2\ ,\ n/2) = \Gamma((m+n)/2)/(\Gamma(m/2)\Gamma(n/2))v^{m/2\ -1}(1+v)^{-(m+n)/2},\quad v>0.$$

Indien y egter verdeel is soos 'n nie-sentrale χ^2 met nie-sentrale parameter λ, dan word die verdelingsfunksie van u en v respektiewelik gegee deur

$$\beta_1(u\ ;\ m/2\ ,\ n/2\ ,\ \lambda/2) = \Gamma((m+n)/2)/(\Gamma(m/2)\Gamma(n/2))\ e^{-\lambda/2}\ u^{m/2\ -1}(1-u)^{n/2\ -1}\,{}_1F_1((m+n)/2\ ;\ n/2\ ;\ \lambda(1-U)/2),\ 0<u<1,$$

en

$$\beta_2(v\ ;\ m/2\ ,\ n/2\ ,\ \lambda/2) = \Gamma((m+n)/2)/(\Gamma(m/2)\Gamma(n/2))\ e^{-\lambda/2}\ v^{m/2\ -1}(1+v)^{-(m+n)/2}\,{}_1F_1((m+n)/2\ ;\ n/2\ ;\ \lambda(1+v)^{-1}/2),\ v>0.$$

Indien x in plaas van y verdeel is soos 'n nie-sentrale χ^2 met nie-sentrale parameter λ, dan word die verdelingsfunk-

sies respektiewelik/ ...

sies respektiewelik gegee deur

$$\beta_1(u\ ;\ m/2\ ,\ n/2\ ,\ \lambda/2) = \Gamma((m+n)/2)/(\Gamma(m/2)\Gamma(n/2))\ e^{-\lambda/2}\ u^{m/2\ -1}(1-u)^{n/2\ -1}\ {}_1F_1((m+n)/2\ ;\ n/2\ ;\ \lambda u/2),\ 0<u<1,$$

en

$$\beta_2(v\ ;\ m/2\ ,\ n/2\ ,\ \lambda/2) = \Gamma((m+n)/2)/(\Gamma(m/2)\Gamma(n/2))\ e^{-\lambda/2}\ v^{m/2\ -1}(1+v)^{-(m+n)/2}\ {}_1F_1((m+n)/2\ ;\ n/2\ ;\ \lambda v(1+v)^{-1}/2),\ v>0.$$

Met die ontwikkeling van die meerveranderlike statistiese analises het 'n uitbreiding van hierdie verdelings na die meerveranderlike noodwendig gevolg. Die Wishart-verdeling is gedefinieer as die plaasvervanger van die χ^2-verdeling in die meerveranderlike statistiek. So is die statistieke

$$L = (A+B)^{-1/2}A(A+B)^{-1/2}$$

en

$$V = B^{-1/2}AB^{-1/2}$$

gedefinieer as die meerveranderlike analoë van u en v respektiewelik, waar A en B twee onafhanklike Wishart-veranderlikes is van orde p met m en n grade van vryheid respektiewelik. Die verdeling van L is reeds deur Hsu (1939) ondersoek. Uit die werk van Anderson (1958) en Khatri (1959) het dit geblyk dat die verdeling van L 'n meerveranderlike beta van die eerste soort is. Die verdeling van V is deur Olkin en Rubin (1964) afgelei en is 'n meerveranderlike beta van die tweede soort. Kshirsagar (1961) het die nie-sentrale verdeling van L gedefinieer, maar slegs in die lineêre geval, dit is indien die matriks van nie-sentrale parameters Θ van rang een is. Laasgenoemde verdeling volg deur A of B as 'n nie-sentrale Wishart-veranderlike te beskou met nie-sentrale parameter Θ van rang een. Die nie-sentrale verdeling van V is deur Troskie (1966) afgelei en ook slegs in die lineêre geval. Hierdie nie-sentrale verdelings staan bekend as die nie-sen-

trale meerveranderlike/ ...

trale meerveranderlike beta-verdelings van rang een.

Die nie-sentrale verdelings is veral belangrik in die opsig dat die nie-sentrale verdelings van sommige van die volgende toetsingsgroothede daaruit herlei kan word:

(i) $|I-L|$ - Wilks se kriterium of die aanneemlikheidsverhoudings kriterium (Wilks (1932)).

(ii) l_1 - Roy se grootste-karakteristieke-wortel kriterium (Roy (1945)). l_1 is die grootste karakteristieke wortel van L.

(iii) $SpL(I-L)^{-1}$ en spL - Pillai se kriteria (Pillai (1955),(1960)).

Hierdie toetsingsgroothede e.a. bestaan as alternatiewes vir die toets van verskeie hipotesese in meerveranderlike regressie-analises en variansie-analises (sien Anderson (1958)).

In hoofstuk 2 word die verdeling van L ondersoek indien Θ van rang $r \leq p$ is. Asimptotiese verdelings vir $|I-L|$ en $|L|$ word afgelei en waardes van die onderskeidingsvermoë-funksie van Wilks se kriterium is bereken en getabuleer. Van hierdie resultate is reeds aangebied vir publikasie (de Waal). Die eksakte verdeling van l_1 word gedefinieer en die momente van spL word gevind. Dit word ook aangetoon dat indien $r<p$ die verdeling van L geskrywe kan word as die produk van onafhanklike beta-verdelings van die eerste soort vermenigvuldig met 'n nie-sentrale meerveranderlike beta-verdeling van die eerste soort en van volle rang.

In hoofstuk 3 word die verdeling van V indien Θ van rang $r \leq p$ is, ondersoek. Eksakte verdelings vir spV en spV^{-1} word afgelei en dit word aangetoon dat die verdeling van V geskrywe kan word as die produk van onafhanklike beta-verdelings van die tweede soort vermenigvuldig met 'n nie-sentrale meerveranderlike beta-verdeling van die tweede soort en van volle rang. Van hierdie resultate is ook reeds aan-

gebied vir/ ...

gebied vir publikasie (de Waal (b)).

Gepaard met die ontwikkeling van die meerveranderlike beta-verdelings het gegaan die ontwikkeling van die meerveranderlike dirichlet-verdelings.

Veronderstel x_j $(j=1,---,q)$ is onafhanklike χ^2-veranderlikes met m_j grade van vryheid respektiewelik. Laat y 'n χ^2-veranderlike wees en onafhanklik van x_j met n grade van vryheid, dan is $u_1, u_2, --, u_q$,

$$u_j = x_j(\Sigma_j x_j + y)^{-1},$$

gesamentlik verdeel soos 'n dirichlet-verdeling van die eerste soort met verdelingsfunksie

$$D_1(u_1,--,u_q ;m_1/2,--,m_q/2, n/2)$$
$$= \Gamma((m+n)/2)/(\Gamma(n/2)\prod_j^q\Gamma(m_j/2)) \prod_j^q u_j^{(m_j/2)-1}(1-\Sigma_j u_j)^{n/2 -1},$$
$$0<u_j<1,\ 1-\Sigma_j u_j >0,\ m=\Sigma_j m_j.$$

Die gesamentlike verdeling van $v_1, v_2, --, v_q$,

$$v_j = x_j/y,$$

is weer 'n dirichlet van die tweede soort en die verdelingsfuksie word gegee deur

$$D_2(v_1,--v_q ;m_1/2,--,m_q/2, n/2)$$
$$= \Gamma((m+n)/2)/(\Gamma(n/2)\prod_j\Gamma(m_j/2))\prod_j v_j^{(m_j/2)-1}(1+\Sigma_j v_j)^{-(m+n)/2},$$
$$v_j>0.$$

Indien y egter verdeel is soos 'n nie-sentrale χ^2 word die ooreenkomstige nie-sentrale verdelings verkry.

In die meeveranderlike statistiek is die statistieke

$$L_j = (\Sigma_j A_j+B)^{-1/2}A_j(\Sigma_j A_j+B)^{-1/2}$$

en

$$V_j = B^{-1/2}A_jB^{-1/2}$$

as die meerveranderlike analoë van u_j en v_j respektiewelik

gedefinieer/ ...

gedefinieer waar A_j ($j=1,--,q$) en B onafhanklike Wishart-veranderlikes is van orde p met m_j en n grade van vryheid respektiewelik. Olkin en Rubin (1964) het die gesamentlike verdeling van L_1, L_2, --, L_q afgelei as 'n meerveranderlike dirichlet-verdeling van die eerste soort. Die gesamentlike verdeling van V_1, V_2, --, V_q is deur Troskie (1966) gedefinieer as 'n meerveranderlike dirichlet-verdeling van die tweede soort. Troskie (1967) het daarna die nie-sentrale meerveranderlike dirichlet-verdelings van die eerste en tweede soort afgelei in die lineêre geval, d.i. deur B as 'n nie-sentrale Wishart-veranderlike te beskou met nie-sentrale parameter Θ van rang een.

In hoofstuk 4 word die nie-sentrale meerveranderlike dirichlet-verdelings van die eerste en tweede soort van rang $r \leq p$ afgelei asook die asimptotiese verdeling van $\overline{\prod}|L_j|$. Die eksakte verdeling van $\Sigma_j spV_j$ word ook gedefinieer.

In hoofstukke 5-7 word die komplekse analoë van die werk in hoofstukke 2-4 beskou.

In hoofstuk 8 word die asimptotiese verdelings van $|R|$ en $|I-R|$ afgelei asook die eksakte verdeling van r_1^2, die grootste wortel van R, waar R die algemene meervoudige korrelasie matriks is soos gedefinieer deur Khatri (1964). Die verdelings word ook afgelei indien R 'n komplekse veranderlike is.

Aangesien hipergeometriese funksies van matriks argument en sonale-polinome deurgaans in hierdie studie gebruik word, sal dit kortliks in 1.2 gedefinieer word met sommige van hulle eienskappe in die reële en komplekse gevalle. In 1.3 word die sentrale en nie-sentrale Wishart-verdelings gegee asook 'n paar belangrike integrale wat daaruit volg en waarna dikwels verwys word.

Dit dien net daarop gewys te word dat deurgaans in hier-

die studie/ ...

die studie die volgende definisie vir $A^{1/2}$ gebruik sal word:

$$A^{1/2} = T \text{ met } A = TT'$$

sodanig dat T 'n onderdriehoekige matriks is met diagonaal-elemente positief (sien Olkin en Rubin (1964)). Verder word van die veronderstelling uitgegaan dat $A^{1/2}BA^{1/2} = A^{1/2}B(A^{1/2})'$.

1.2 Hipergeometriese funksies en sonale-polinome.

Reëel.

Die hipergeometriese funksie van matriks argument word in die algemeen gedefinieer as (Constantine (1963))

1.2.1 $${}_rF_q(a_1,a_2,--,a_r\ ;\ b_1,b_2,--,b_q\ ;\ S)$$
$$= \Sigma_{k=0}^{\infty}\Sigma_K(a_1)_K\cdot\cdot(a_r)_K\ C_K(S)/(b_1)_K\cdot\cdot(b_q)_K k!$$

waar S 'n reële simmetriese matriks van orde p is.

$$(a)_K = \prod_{i=1}^{p}(a + (1-i)/2)_{K_i}$$

en $(a)_{K_i} = a(a + 1)\ldots(a + K_i - 1)$. Indien die gamma-funksie bestaan, kan $(a)_K$ ook geskrywe word as

1.2.2 $$(a)_K = \Gamma_p(a,K)/\Gamma_p(a)$$

waar

1.2.3 $$\Gamma_p(a,K) = \pi^{p(p-1)/4}\prod_{i=1}^{p}\Gamma(a + K_i + (1-i)/2)$$

en $\Gamma_p(a) = \Gamma_p(a,0)$. $K = (K_1,K_2,--,K_p)$, $K_1\geq K_2\geq--\geq K_p\geq 0$, is 'n opsplitsing van k in nie meer as p komponente nie sodanig dat $\Sigma_i K_i = k$.

Vir elke opsplitsing K van k bestaan daar 'n sonale-polinoom $C_K(S)$ (James (1961)(a)) wat 'n homogene simmetriese polinoom in die elemente van S is sodanig dat

1.2.4 $$\Sigma_K C_K(S) = (\text{sp}S)^k.$$

Die volgende eienskappe is van belang:

1.2.5 $$C_K(RSP) = C_K(PRS) = C_K(SPR)$$

1.2.6 $C_K(aS)/$ ...

1.2.6 $\quad C_K(aS) = a^k C_K(S) \quad$ (a 'n skalar)

1.2.7 $\quad \int_{O(p)} C_K(PHSH')d(H) = C_K(P)C_K(S)/C_K(I_p)$

waar H 'n ortogonale matriks is en d(H) die invariante Haar-maat is oor die ortogonale groep O(p), genormaliseer sodat die maat oor die hele groep een is. Indien die eerste ry elemente van H positief is, word die normaliserende-konstante gegee deur (James (1954))

1.2.8 $\quad (1/2^p)\int_{O(p)} d(H) = \pi^{p^2/2}/\Gamma_p(p/2)$.

Deur van 1.2.7 gebruik te maak, volg dat (James (1964))

1.2.9 $\quad \int_{O(p)} {}_rF_q(a_1,--,a_r\ ;\ b_1,--,b_q\ ;\ PHSH')d(H)$

$$= {}_rF_q(a_1,--,a_r\ ;\ b_1,--,b_q\ ;\ P,S)$$

Eksplisiete vorms vir $C_K(S)$ is slegs bekend indien (i) $S = I_p$ (Constantine (1963)), (ii) p = 2 (James (1964)), (ii) K slegs uit een komponent bestaan, d.i. K=(k,0,--,0)=(k) (Rubin (1962)). Tabelle is bekikbaar (James (1964) en James en Parkhurst) vir die berekening van $C_K(S)$ vir k=1(1)11.

Indien S van rang $r \leq p$ is, bestaan 'n ortogonale matriks C sodanig dat

$$CSC' = \begin{pmatrix} S_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

waar $S_r(r\mathrm{x}r)$ van rang r is. Die sonale-polinoom $C_K(S)$ word nou (James (1961)(b))

1.2.10 $\quad C_K(S) = \begin{cases} 0 & K_{i>r} \neq 0 \\ C_K(S_r) & K_{i>r} = 0 \end{cases}$

K is nou 'n opsplitsing van k in nie meer as r komponente nie.

'n Spesiale vorm van 1.2.1 is (James (1964))

1.2.11 $\quad {}_1F_0(a\ ;\ S) = |I-S|^{-a}$.

<u>Kompleks.</u>

Indien die argument S van die hipergeometriese funksie as Hermities beskou word, d.i. $S=\overline{S}'$ waar $\overline{S}$ die toegevoegde

van S is/ ...

van S is, word die hipergeometriese funksie gedefinieer as (James (1964))

1.2.12 $\quad {}_r\overline{F}_q(a_1,--,a_r\ ;\ b_1,--,b_q\ ;\ S)$

$$= \Sigma_{k=0}\Sigma_K[a_1]_K\ldots[a_r]_K\ \overline{C}_K(S)/[b_1]_K\ldots[b_q]_K k!$$

waar $S = S_R + iS_I$. R dui die reëele deel aan en I die imaginêre deel.

1.2.13 $\quad [a]_K = \prod_{i=1}^{p}(a + 1 - i)_{K_i}$

of

1.2.14 $\quad = \overline{\Gamma}_p(a,K)/\overline{\Gamma}_p(a)$

indien die gamma-funksie bestaan.

1.2.15 $\quad \overline{\Gamma}_p(a,K) = \pi^{p(p-1)/2}\prod_{i=1}\Gamma(a+1-i+K_i)$

1.2.16 $\quad \overline{\Gamma}_p(a) = \overline{\Gamma}_p(a,0)$

$K = (K_1,--,K_p)$ is 'n opsplitsing van k in nie meer as p komponente nie. $\overline{C}_K(S)$ is die sonale-polinoom van die Hermitiese matriks S. Die eienskappe 1.2.5 en 1.2.6 geld ook in hierdie geval terwyl die eienskap 1.2.7 nou is

1.2.17 $\quad \int_{O(p)}\overline{C}_K(PUS\overline{U}')d(U) = \overline{C}_K(P)\overline{C}_K(S)/\overline{C}_K(I_p)$

waar U 'n unitêre-matriks is, d.i. $U\overline{U}'= I_p$, en d(U) die invariante Haar-maat is oor die unitêre-groep U(p) genormaliseer sodat die totale maat een is. Die normaliserende-konstant word in hierdie geval

1.2.18 $\quad \pi^{p(p-1)}/\overline{\Gamma}_p(p)$.

Deur van 1.2.17 gebruik te maak, volg dat (James (1964))

1.2.19 $\quad \int_{U(p)}\ {}_r\overline{F}_q(a_1,--,a_r\ ;\ b_1,--,b_q\ ;\ PUS\overline{U}')d(U)$

$$= {}_r\overline{F}_q(a_1,--,a_r\ ;\ b_1,--,b_q\ ;\ P,S).$$

Indien die rang van S gelyk is aan $r \leq p$, dan soos vir die geval 1.2.10 kan $\overline{C}_K(S)$ geskrywe word as

1.2.20 $\quad \overline{C}_K(S) = \overline{C}_K(S_r)$

waar K nou 'n opsplitsing van k in nie meer as r komponente is nie en

$CS\overline{C}'= / \ldots$

$CS\overline{C}' = \begin{pmatrix} S_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, C 'n unitêre-matriks.

'n Spesiale vorm van 1.2.13 is (James (1964))

1.2.21 $\quad {}_1\overline{F}_0(a\ ;\ S) = |I-S|^{-a}.$

1.3 Die Wishart-verdeling.

Reëel.

(i) Sentrale Wishart.

Indien X(pxm) 'n matriks-veranderlike is waarvan die kolomme onafhanklik normaal verdeel is met gemiddelde nul en kovariansie matriks Σ, d.i. $N(0,\Sigma)$, dan word die verdeling van $A=XX'$ gegee deur (Anderson (1958))

1.3.1 $\quad W(A\ ;\ \Sigma,m) = [\Gamma_p(m/2)|2\Sigma|^{m/2}]^{-1}\text{esp}(-\Sigma^{-1}A/2)|A|^{(m-p-1)/2},$

$A>0.$

Dit is A is verdeel soos 'n Wishart-verdeling met m grade van vryheid en word geskrywe as $A\sim W(\Sigma,m)$. Dit volg dus dat

1.3.2 $\quad \int_{A>0}\text{esp}(-\Sigma^{-1}A/2)|A|^{(m-p-1)/2}\,dA$

$= \Gamma_p(m/2)|2\Sigma|^{m/2}.$

(ii) Nie-sentrale Wishart.

Indien X(pxm) 'n matriks-veranderlike is waarvan die kolomme onafhanklik normaal verdeel is met $E(X) = M$ en kovariansie matriks Σ, dan word die verdeling van $A=XX'$ gegee deur (Constantine (1963))

1.3.3 $\quad W(A\ ;\ \Sigma,m,\Theta) = W(A\ ;\ \Sigma,m)\text{esp}(-\Theta/2)\,{}_0F_1(m/2\ ;\ \Theta\Sigma^{-1}A/4),$

$A>0,$

waar $\Theta = \Sigma^{-1}MM'$. A is dus verdeel soos 'n nie-sentrale Wishart met m grade van vryheid en nie-sentrale parameter Θ. Dit word geskrywe as $A\sim W(\Sigma,m,\Theta)$. 'n Integraal wat uit hierdie verdeling volg en deur Constantine (1963) bewys is, is

1.3.4 $\quad \int_{A>0}\text{esp}(-RA)|A|^{(m-p-1)/2}\,C_K(TA)\,dA$

$= \Gamma_p(m/2,K)|R|^{-m/2}C_K(TR^{-1}).$

Kompleks/ ...

Kompleks.

(i) Sentrale Wishart.

Indien $Z(p\times m) = X + iY$ 'n komplekse veranderlike is waarvan die kolomme van Z onafhanklik normaal (kompleks) verdeel is met gemiddelde nul en kovariansie matriks $\Sigma = \bar{\Sigma}'$, d.i. $CN(0,\Sigma)$, dan word die verdeling van $A=Z\bar{Z}'$ gegee deur (Goodman (1963))

1.3.5 $CW(A\,;\,\Sigma,m) = [\tilde{\Gamma}_p(m)|\Sigma|^m]^{-1}\mathrm{esp}(-\Sigma^{-1}A)|A|^{m-p}$, $A=\bar{A}'>0$.

Dit is die komplekse Wishart-verdeling met m grade van vryheid. Met andere woorde $A\sim CW(\Sigma,m)$. Uit hierdie verdeling volg die volgende integraal:

1.3.6 $\int_{A=\bar{A}'>0}\mathrm{esp}(-\Sigma^{-1}A)|A|^{m-p}\,dA = \tilde{\Gamma}_p(m)|\Sigma|^m$.

(ii) Nie-sentrale Wishart.

Indien $Z\sim CN(M,\Sigma)$, word die verdeling van $A=Z\bar{Z}'$ gegee deur (James (1964))

1.3.7 $CW(A\,;\,\Sigma,m,\Theta) = CW(A\,;\,\Sigma,m)\mathrm{esp}(-\Theta)\,{}_0\tilde{F}_1(m\,;\,\Theta\Sigma^{-1}A)$

waar $\Theta = \Sigma^{-1}M\bar{M}'$ die nie-sentrale parameter is, d.i. $A\sim CW(\Sigma,m,\Theta)$. Die volgende integraal volg nou:

1.3.8 $\int_{A=\bar{A}'>0}\mathrm{esp}(-\Sigma^{-1}A)|A|^{m-p}\,\tilde{C}_K(\Theta\Sigma^{-1}A)\,dA$

$= \tilde{\Gamma}_p(m,K)|\Sigma|^m\,\tilde{C}_K(\Theta)$.

A. Reële veranderlikes.

HOOFSTUK II.

DIE NIE-SENTRALE MEERVERANDERLIKE BETA-VERDELING VAN DIE EERSTE SOORT.

2.1 Inleiding.

Die verdeling van $L = (A+B)^{-1/2}A(A+B)^{-1/2}$ word in hierdie hoofstuk ondersoek in die volgende gevalle:

(i) $A \sim W(\Sigma,m)$ en $B \sim W(\Sigma,n,\Theta)$

(ii) $A \sim W(\Sigma,m,\Theta)$ en $B \sim W(\Sigma,n)$

(iii) $A \sim W(\Sigma_1,m)$ en $B \sim W(\Sigma_2,n)$

In 2.2 word die verdeling van L gedefinieer in elk van die drie gevalle en waar die nie-sentrale parameter Θ as van rang $r \leq p$ beskou word. Asimptotiese verdelings vir $|L|$ en $|I-L|$ word in 2.3 gegee en in 2.4 word die verdeling van die grootste karakteristieke wortel van L afgelei. In 2.5 word aangetoon dat indien $r<p$ die verdelings van $|L|$, $|I-L|$ en L geskrywe kan word as die produk van onafhanklike beta-verdelings van die eerste soort. Laasgenoemde word slegs aangetoon vir geval (i) aangesien in geval (ii) die metode soortgelyk is.

Jakobiane wat nie bewys word nie kan gevind word in Deemer en Olkin (1951) en Olkin en Rubin (1964).

2.2 Die verdeling van L.

Stelling 2.2.1.

Indien $A \sim W(\Sigma,m)$ en $B \sim W(\Sigma,n,\Theta)$, Θ van rang p, word die verdelingsfunksie van L gegee deur

2.2.1 $$\beta_1(L\,;\,m/2,n/2,\Theta/2) = [\Gamma_p(m/2)\Gamma_p(n/2)|2\Sigma|^{(m+n)/2}]^{-1}$$
$$\operatorname{esp}(-\Theta/2)|L|^{(m-p-1)/2}|I-L|^{(n-p-1)/2}\int_{T>0}\operatorname{esp}(-\Sigma^{-1}T/2)$$
$$|T|^{(m+n-p-1)/2}{}_0F_1(n/2\,;\,\Theta\Sigma^{-1}T^{1/2}(I-L)T^{1/2}/4)dT,$$
$$0<L<I.$$

Bewys/ ...

Bewys.

Stel $L = T^{-1/2}AT^{-1/2}$, $T = A+B$, in die gesamentlike verdeling van A en B. Die jakobiaan van die transformasie is $J(A,B \rightarrow L,T) = |T|^{(p+1)/2}$. Integreer na T en die stelling is bewys. Met verwysing na die werk van Troskie (1966) is 2.2.1 'n nie-sentrale meerveranderlike beta-verdeling van die eerste soort van volle rang.

Alhoewel die verdeling van L nie in 'n eksplisiete vorm geskryf kan word nie, kan die h-de momente van $|L|$ en $|I-L|$ gevind word deur gebruik te maak van die integraal (Constantine (1963))

2.2.2 $\int_0^I |L|^{a-(p+1)/2}|I-L|^{b-(p+1)/2}\, C_K(R(I-L))\, dL$

$$= \Gamma_p(a)\Gamma_p(b,K)C_K(R)/\Gamma_p(a+b,K)$$

en die integraal 1.3.4 respektiewelik.

Dit is

2.2.3 $E|L|^h = \Gamma_p(m/2 +h)/(\Gamma_p(m/2)\Gamma_p((m+n)/2 +h)|2\Sigma|^{(m+n)/2})$

$$\mathrm{esp}(-\theta/2)\int_{T>0}\mathrm{esp}(-\Sigma^{-1}T/2)|T|^{(m+n-p-1)/2}$$

$$_0F_1((m+n)/2 +h\ ;\ \theta\Sigma^{-1}T/4)dT$$

$$= \Gamma_p(m/2 +h)\Gamma_p((m+n)/2)/(\Gamma_p(m/2)\Gamma_p((m+n)/2 +h))$$

$$\mathrm{esp}(-\theta/2)\,{}_1F_1((m+n)/2\ ;\ (m+n)/2 +h\ ;\ \theta/2).$$

Soortgelyk is

2.2.4 $E|I-L|^h = \Gamma_p(n/2 +h)\Gamma_p((m+n)/2)/(\Gamma_p(n/2)\Gamma_p((m+n)/2 +h))$

$$\mathrm{esp}(-\theta/2)\,{}_2F_2((m+n)/2,n/2 +h\ ;\ n/2,(m+n)/2 +h\ ;$$

$$\theta/2).$$

Indien $\theta = 0$ volg uit 2.2.1 deur gebruik te maak van 1.3.2, die sentrale verdeling van L

$$\beta_1(L\ ;\ m/2,n/2) = \Gamma_p((m+n)/2)/(\Gamma_p(m/2)\Gamma_p(n/2))|L|^{(m-p-1)/2}$$

$$|I-L|^{(n-p-1)/2},\quad 0<L<I.$$

Om die/ ...

Om die verdeling van L te definieer indien Θ van rang $r<p$ is, moet die verdelings van A en B in hulle kanoniese vorm beskou word. Aangesien 'n nie-singuliere matriks F sodanig bestaan dat (Anderson (1958)) $F\Sigma F' = I$ en $FMM'F' = \Theta$ (Θ diagonaal), kan die verdeling van B in sy kanoniese vorm geskrywe word onder die transformasie $FBF' = B$, naamlik $B \sim W(I,n,\Theta)$. Laasgenoemde B is nie dieselfde as eersgenoemde nie en Θ is nou 'n diagonaal matriks. Voer dieselfde transformasie op A uit, naamlik $FAF' = A$, dan is $A \sim W(I,m)$. Die verdeling van L is nie invariant ten opsigte van hierdie transformasies nie terwyl $|L|$ wel is. Die volgende afleiding kan nou bewys word.

Afleiding 2.2.1

Indien $A \sim W(I,m)$ en $B \sim W(I,n,\Theta)$, Θ diagonaal en van rang $r<p$, word die verdelingsfunksie van L gegee deur

2.2.5 $$\beta_1(L\,;\,m/2,n/2,\Theta_r/2) = \Gamma_p((m+n)/2)/(\Gamma_p(m/2)\Gamma_p(n/2)$$
$$\Gamma_r((m+n)/2)|2I_r|^{(m+n)/2})\operatorname{esp}(-\Theta_r/2)|L|^{(m-p-1)/2}$$
$$|I-L|^{(n-p-1)/2}\int_{T_{11}>0}\operatorname{esp}(-T_{11}/2)|T_{11}|^{(m+n-r-1)/2}$$
$${}_0F_1(n/2\,;\tfrac{1}{4}\Theta_r T_{11}{}^{1/2}(I-L_{11})T_{11}{}^{1/2})dT_{11}$$

waar Θ_r van orde r is.

Bewys.

Laat $\Sigma=I$ en Θ diagonaal wees in 2.2.1, dan is die verdeling van L

2.2.6 $$[\Gamma_p(m/2)\Gamma_p(n/2)|2I_p|^{(m+n)/2}]^{-1}\operatorname{esp}(-\Theta/2)|L|^{(m-p-1)/2}$$
$$|I-L|^{(n-p-1)/2}\int_{T>0}\operatorname{esp}(-T/2)|T|^{(m+n-p-1)/2}$$
$${}_0F_1(n/2\,;\,\Theta T^{1/2}(I-L)T^{1/2}/4)dT.$$

Aangesien Θ van rang r is, is $\Theta = \begin{pmatrix}\Theta_r & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$ waar Θ_r van orde r is. Laat $T = \begin{pmatrix}T_{11} & 0\\ T_{21} & T_{22}\end{pmatrix}$ en $L = \begin{pmatrix}L_{11} & L_{12}\\ L_{21} & L_{22}\end{pmatrix}$ sodanig dat T_{11} en

L_{11} van/ ...

L_{11} van orde r is. Aangesien T onderdriehoekig is, is $T^{1/2}$ onderdriehoekig en wel van die vorm

2.2.7 $$T^{1/2} = \begin{pmatrix} T_{11}^{1/2} & 0 \\ T_{21}^{+} & T_{22}^{+} \end{pmatrix}.$$

Die argument van die hipergeometriese funksie in 2.2.6 kan derhalwe geskrywe word as

2.2.8 $$\theta T^{1/2}(I-L)T^{1/2} = \begin{pmatrix} \theta_r T_{11}^{1/2}(I-L_{11})T_{11}^{1/2} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Deur gebruik te maak van 1.2.10, d.i.

2.2.9 $$C_K(\theta T^{1/2}(I-L)T^{1/2}/4) = C_K(\theta_r T_{11}^{1/2}(I-L_{11})T_{11}^{1/2}/4),$$
$$K_{i>r}=0,$$

kan die verdelingsfunksie van L geskrywe word as

2.2.10 $$[\Gamma_p(m/2)\Gamma_p(n/2)|2I_p|^{(m+n)/2}]^{-1}\text{esp}(-\theta_r/2)|L|^{(m-p-1)/2}$$
$$|I-L|^{(n-p-1)/2}\int_{T>0}\text{esp}(-T/2)|T|^{(m+n-p-1)/2}$$
$$_0F_1(n/2\ ;\ \theta_r T_{11}^{1/2}(I-L_{11})T_{11}^{1/2}/4)dT.$$

Aangesien

2.2.11 $$\int_{T>0}\text{esp}(-T/2)|T|^{(m+n-p-1)/2}\, dT_{12}dT_{22}$$
$$= \Gamma_p((m+n)/2)|2I_p|^{(m+n)/2}/(\Gamma_r((m+n)/2)|2I_r|^{(m+n)/2})$$
$$|T_{11}|^{(m+n-r-1)/2}\text{esp}(-T_{11}/2),$$

volg die afleiding. Die integraal 2.2.11 volg uit die eienskap dat die diagonaal-elemente van 'n Wishart-veranderlike weer Wishart is (Anderson (1958)).

2.2.5 is 'n nie-sentrale meerveranderlike beta-verdeling van die eerste soort van rang r.

Indien r=1 word 2.2.5

2.2.12 $\beta_1(L\ ;\ m/2,n/2,\theta_1/2)/$ ...

2.2.12 $\beta_1(L ; m/2, n/2, \theta_1/2) = \Gamma_p((m+n)/2)/(\Gamma_p(m/2)\Gamma_p(n/2)$

$\Gamma((m+n)/2)2^{(m+n)/2}) \; e^{-\theta_1/2}|L|^{(m-p-1)/2}$

$|I-L|^{(n-p-1)/2} \int_{t_{11}>0} e^{-t_{11}/2} \; t_{11}^{(m+n-2)/2}$

${}_0F_1(n/2 \; ;\tfrac{1}{4}\theta_1 t_{11}(1-l_{11}))dt_{11}$

$= \Gamma_p((m+n)/2)/(\Gamma_p(m/2)\Gamma_p(n/2))$

$e^{-\theta_1/2}|L|^{(m-p-1)/2}|I-L|^{(n-p-1)/2}$

${}_1F_1((m+n)/2 \; ; \; n/2 \; ; \; \theta_1(1-l_{11})/2).$

Hierdie verdeling is die nie-sentrale meerveranderlike beta van die eerste soort in die lineêre geval soos afgelei deur Kshirsagar (1961).

Die h-de momente van $|L|$ en $|I-L|$ in die geval $r<p$ kan uit 2.2.5 herlei word, maar dit kan sondermeer uit 2.2.3 en 2.2.4 respektiewelik soos volg gevind word: As Θ van rang r is, bestaan 'n ortogonale matriks C sodanig dat

$$C\Theta C' = \begin{pmatrix} \theta_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Die momente is invariant ten opsigte van so 'n ortogonale transformasie. Deur van 1.2.10 gebruik te maak, volg dus

2.2.13 $E|L|^h = \Gamma_p(m/2 +h)\Gamma_p((m+n)/2)/(\Gamma_p(m/2)\Gamma_p((m+n)/2 +h))$

$\text{esp}(-\theta_r/2)\,{}_1F_1((m+n)/2 \; ; \; (m+n)/2 +h \; ; \; \theta_r/2)$

en

2.2.14 $E|I-L|^h = \Gamma_p(n/2 +h)\Gamma_p((m+n)/2)/(\Gamma_p(n/2)\Gamma_p((m+n)/2 +h))$

$\text{esp}(-\theta_r/2)\,{}_2F_2((m+n)/2, n/2 +h \; ; \; n/2, (m+n)/2 +h \; ; \; \theta_r/2).$

<u>Stelling 2.2.2</u>

Indien $A \sim W(\Sigma, m, \Theta)$ en $B \sim W(\Sigma, n)$, Θ van rang p, word die verdelingsfunksie van L gegee deur

2.2.15 $\beta_1(L$ / ...

2.2.15 $\beta_1(L\ ;\ m/2,n/2,\theta/2) = [\Gamma_p(m/2)\Gamma_p(n/2)|2\Sigma|^{(m+n)/2}]^{-1}$

$$\mathrm{esp}(-\theta/2)|L|^{(m-p-1)/2}|I-L|^{(n-p-1)/2}\int_{T>0}$$

$$\mathrm{esp}(-\Sigma^{-1}T/2)|T|^{(m+n-p-1)/2}\,{}_0F_1(m/2\ ;\tfrac{1}{4}\theta\Sigma^{-1}T^{1/2}LT^{1/2})$$

$$dT.$$

Bewys.

Die bewys is dieselfde as die van stelling 2.2.1.

Deur gebruik te maak van die integrale (sien 2.2.2)

2.2.16 $\int_0^I |L|^{b-(p+1)/2}|I-L|^{a-(p+1)/2}\ C_K(RL)\ dL$

$$= \Gamma_p(b,K)\Gamma_p(a)C_K(R)/\Gamma_p(b+a,K)$$

en 1.3.4 respektiewelik, volg uit 2.2.15 dat

2.2.17 $E|L|^h = \Gamma_p(m/2\ +h)\Gamma_p((m+n)/2)/(\Gamma_p(m/2)\Gamma_p((m+n)/2\ +h))$

$$\mathrm{esp}(-\theta/2)\,{}_2F_2((m+n)/2,m/2\ +h\ ;\ m/2,(m+n)/2\ +h\ ;\ \theta/2)$$

en

2.2.18 $E|I-L|^h = \Gamma_p(n/2\ +h)\Gamma_p((m+n)/2)/(\Gamma_p(n/2)\Gamma_p((m+n)/2\ +h))$

$$\mathrm{esp}(-\theta/2)\,{}_1F_1((m+n)/2\ ;\ (m+n)/2\ +h\ ;\ \theta/2).$$

Afleiding 2.2.2

Indien $A\sim W(I,m,\theta)$ en $B\sim W(I,n)$, θ diagonaal en van rang $r<p$, word die verdeling van L

2.2.19 $\beta_1(L\ ;\ m/2,n/2,\theta_r/2) = \Gamma_p((m+n)/2)/(\Gamma_p(m/2)\Gamma_p(n/2)$

$$\Gamma_r((m+n)/2)|2I_r|^{(m+n)/2})\ \mathrm{esp}(-\theta_r/2)|L|^{(m-p-1)/2}$$

$$|I-L|^{(n-p-1)/2}\int_{T_{11}>0}\mathrm{esp}(-T_{11}/2)|T_{11}|^{(m+n-r-1)/2}$$

$${}_0F_1(m/2\ ;\ \theta_r T_{11}{}^{1/2}L_{11}T_{11}{}^{1/2}/4)dT_{11}.$$

Bewys.

Die bewys is dieselfde as die van afleiding 2.2.1.

Uit 2.2.17 en 2.2.18 volg nou sondermeer dat

2.2.20 $E|L|^h = \Gamma_p(m/2 + h)\Gamma_p((m+n)/2)/(\Gamma_p(m/2)\Gamma_p((m+n)/2 + h))$

$\text{esp}(-\theta_r/2)\,{}_2F_2((m+n)/2, m/2 + h\ ;\ m/2, (m+n)/2 + h\ ;$

$\theta_r/2)$

en

2.2.21 $E|I-L|^h = \Gamma_p(n/2 + h)\Gamma_p((m+n)/2)/(\Gamma_p(n/2)\Gamma_p((m+n)/2 + h))$

$\text{esp}(-\theta_r/2)\,{}_1F_1((m+n)/2\ ;\ (m+n)/2 + h\ ;\ \theta_r/2)$

indien θ van rang r is.

Stelling 2.2.3

Indien $A \sim W(\Sigma_1, m)$ en $B \sim W(\Sigma_2, n)$ word die verdelingsfunksie van L gegee deur

2.2.22 $f(L) = [\Gamma_p(m/2)\Gamma_p(n/2)|2\Sigma_1|^{m/2}|2\Sigma_2|^{n/2}]^{-1}|L|^{(m-p-1)/2}$

$|I-L|^{(n-p-1)/2} \int_{T>0} \text{esp}(-\Sigma_2^{-1}T/2)|T|^{(m+n-p-1)/2}$

${}_0F_0(-T^{1/2}(\Sigma_1^{-1}-\Sigma_2^{-1})T^{1/2}L/2)dT.$

Bewys.

Die gesamentlike verdelingsfunksie van A en B word gegee deur

2.2.23 $[\Gamma_p(m/2)\Gamma_p(n/2)|2\Sigma_1|^{m/2}|2\Sigma_2|^{n/2}]^{-1}|A|^{(m-p-1)/2}|B|^{(n-p-1)/2}$

$\text{esp}(-(\Sigma_1^{-1}A+\Sigma_2^{-1}B)/2).$

Onder die substitusie $L = T^{-/2}AT^{-1/2}$, $T = A+B$, kan die eksponent-term geskrywe word as

$\text{esp}(-(\Sigma_1^{-1}A+\Sigma_2^{-1}B)/2)$

$= \text{esp}(-(\Sigma_1^{-1}T^{1/2}LT^{1/2} + \Sigma_2^{-1}T^{1/2}(I-L)T^{1/2})/2)$

$= \text{esp}(-(T^{1/2}(\Sigma_1^{-1}-\Sigma_2^{-1})T^{1/2}L + \Sigma_2^{-1}T)/2)$

$= \text{esp}(-\Sigma_2^{-1}T/2)\ {}_0F_0(-T^{1/2}(\Sigma_1^{-1}-\Sigma_2^{-1})T^{1/2}L/2).$

Integrasie na T in die gesamentlike verdeling van L en T lewer die stelling. Hierdie verdeling word ook geklassifiseer as 'n nie-sentrale meerveranderlike beta-verdeling van

die eerste/ ...

die eerste soort.

Die h-de momente van $|L|$ en $|I-L|$ indien L verdeel is soos in 2.2.22, kan gevind word deur gebruik te maak van 2.2.16 en 1.3.4 respektiewelik. Derhalwe is

2.2.24 $$E|L|^h = \Gamma_p((m+n)/2)\Gamma_p(m/2 + h)/(\Gamma_p(m/2)\Gamma_p((m+n)/2 + h)) \\ |\Sigma_1^{-1}\Sigma_2|^{m/2} {}_2F_1((m+n)/2, m/2 + h \ ; \ (m+n)/2 + h \ ; \\ I-\Sigma_1^{-1}\Sigma_2)$$

en

2.2.25 $$E|I-L|^h = \Gamma_p((m+n)/2)\Gamma_p(n/2 + h)/(\Gamma_p(n/2)\Gamma_p((m+n)/2 + h)) \\ |\Sigma_1^{-1}\Sigma_2|^{m/2} {}_2F_1(m/2, (m+n)/2 \ ; \ (m+n)/2 + h \ ; \ I-\Sigma_1^{-1}\Sigma_2)$$

Indien h=0 in enige van bogenoemde momente volg die resultaat soos gegee deur James (1964)

$${}_1F_0(m/2 \ ; \ I-S) = |S|^{-m/2}.$$

2.3 Asimptotiese verdelings vir $|L|$ en $|I-L|$.

Die volgende benaderings-prosedure sal gebruik word (Box (1949), Anderson (1958)):

Beskou 'n funksie g met voorskrif

2.3.1 $$g(t) = C(x^{px}/\textstyle\prod_{h=1}^{q} x_h^{px_h})^{-2it\rho} \prod_{j=1}^{p}(\prod_{h=1}^{q}\Gamma(\rho x_h(1-2it) + \\ \beta_h + \nu_j)/\Gamma(\rho x(1-2it) + \beta + \nu_j + \gamma_j))$$

waar C 'n konstante is sodanig dat $g(0) = 1$, ρ 'n gekose konstant, $\Sigma_h x_h = x$, $\beta_h = (1-\rho)x_h$, $\beta = (1-\rho)x$ en $i = (-1)^{1/2}$.

Deur gebruik te maak van die benadering

$$\log\Gamma(x+h) = \log\sqrt{(2\pi)} + (x+h-1/2)\log x - x - \Sigma_{r=1}^{m}((-1)^r B_{r+1}(h)/ \\ r(r+1)x^r) + R_{m+1}(x)$$

waar $R_{m+1}(x) = O(x^{-(m+1)})$ en $B_r(h)$ die r-de graads Bernoulli-polinoom is [1], kan die funksie g geskryf word as

2.3.2 $g(t) = (1-2it)^{-f/2}(1 + T_1(t) + T_2(t) + -- + R)$

R is 'n resterm wat willekeurig klein gemaak kan word.

2.3.3 $f = \Sigma_{j=1}^{p}((q-1)(1-2\nu_j) + 2\gamma_j)$

2.3.4 $T_1(t) = \omega_1((1-2it)^{-1} - 1)$,

$T_2(t) = \omega_2((1-2it)^{-2}-1) + \frac{1}{2}\omega_1{}^2((1-2it)^{-2}-2(1-2it)^{-1}+1)$,

----

2.3.5 $\omega_r = (-1)^{r+1}/(r(r+1)\rho^r)\ \Sigma_{j=1}^{p}(\Sigma_{h=1}^{q} B_{r+1}(\beta_h+\nu_j)/x_h{}^r -$

$B_{r+1}(\beta+\nu_j+\gamma_j)/x^r)$.

Deur gebruik te maak van die uitdrukking vir $B_2(h)$ volg

2.3.6 $\omega_1 = (1/2\rho)(\Sigma_j((\Sigma_h \frac{1}{x_h} - \frac{1}{x})(\nu_j{}^2-\nu_j+1/6) - (\gamma_j{}^2+2\gamma_j\nu_j-\gamma_j)/x)$

$- (1-\rho)f)$.

2.3.1 is 'n meer algemene vorm waaruit volg dat as q=1

2.3.7 $g(t) = C\prod_{j=1}^{p}(\Gamma(\rho x(1-2it)+\beta+\nu_j)/\Gamma(\rho x(1-2it)+\beta+\nu_j+\gamma_j))$.

2.3.2 bly dieselfde, maar nou is

2.3.8 $f = 2\Sigma_j\gamma_j$ en

2.3.9 $\omega_1 = (-1/2\rho)(\Sigma_j(\gamma_j{}^2+2\gamma_j\nu_j-\gamma_j)/x + (1-\rho)f)$

Die volgende stellings kan nou bewys word.

<u>Stelling 2.3.1</u>

Indien $A \sim W(\Sigma,m)$ en $B \sim W(\Sigma,n,\Theta)$, Θ van rang p, dan word

---

1) $O(x^{-(m+1)})$ beteken dat $|x^{m+1}R_{m+1}(x)|$ begrens is as $|x| \to \infty$.

Die eerste drie Bernoulli-polinome is $(B_0(h)=1)$

$B_1(h) = h - 1/2$

$B_2(h) = h^2 - h + 1/6$

$B_3(h) = h^3 - 3h^2/2 + 3h$.

die asimptotiese-/ ..

die asimptotiese verdeling van $|L|$ gegee deur

2.3.10 $$P(-a\log|L| \leq z) = \Sigma_{k=0}^{\infty} P(\chi^2_{f_k} \leq z)P(k) + \mathrm{esp}(-\theta/2)\Sigma_{k=0}\Sigma_K$$

$$(P(\chi^2_{f_k+2} \leq z) - P(\chi^2_{f_k} \leq z))\omega_{1k}C_K(\theta/2)/k! + O(m^{-2})$$

waar $a=\rho m$, $\rho=1+(n-p-1)/2m$, $f_k = np+2k$,

$\omega_{1k} = (-1/\rho)((1-\rho+n/m)k + (\Sigma_j K_j{}^2 - \Sigma_j K_j j)/m)$ en

$P(k) = \mathrm{esp}(-\theta/2)(\mathrm{sp}\theta/2)^k/k!$.

Bewys.

Stel $W = |L|^{m/2}$ en $M = -2\log W$. Die karakteristieke-funksie van ρM kan nou in 'n vorm geskrywe word wat 2.3.7 bevat deur gebruik te maak van 2.2.3, d.i.

2.3.11 $$\phi_{\rho M}(t) = E|L|^{-it\rho m}$$

$$= \Gamma_p(m(1-2it\rho)/2)\Gamma_p((m+n)/2)/(\Gamma_p(m/2)$$

$$\Gamma_p(m(1-2it\rho)/2 + n/2))\ \mathrm{esp}(-\theta/2)$$

$$ {}_1F_1((m+n)/2\ ;\ m(1-2it\rho)/2 + n/2\ ;\ \theta/2)$$

$$= \mathrm{esp}(-\theta/2)\Sigma_{k=0}\Sigma_K[\Gamma_p((m+n)/2,K)\Gamma_p(m(1-2it\rho)/2)/$$

$$\Gamma_p(m/2)\Gamma_p(m(1-2it\rho)/2 + n/2,K)]\ C_K(\theta/2)/k!.$$

Die term in vierkante-hakies is van die vorm 2.3.7 indien van die meerveranderlike gamma-uitdrukking (1.2.3) gebruik gemaak word met $x = n/2$, $\nu_j = (1-j)/2$ en $\gamma_j = n/2 + K_j$. Deur gebruik te maak van 2.3.2 kan 2.3.11 geskrywe word as

2.3.12 $$\phi(t) = \mathrm{esp}(-\theta/2)\Sigma_k\Sigma_K(1-2it)^{-f_k/2}(1 + T_{1k}(t) +\cdots+ R_k)$$

$$C_K(\theta/2)/k!$$

waar k die k-de term aandui. Volgens 2.3.8 en 2.3.9 respektiewelik volg

2.3.13 $f_k = np + 2k$

en 2.3.14/ ...

en

2.3.14 $\omega_{1k} = (-1/2\rho)((1-\rho)f_k + n(p(n-p-1)/2 + 2k)/m + 2(\Sigma_j K_j^2 - \Sigma_j K_j j)/m).$

Dit blyk dus dat f_k onafhanklik van K is. Deur van 2.3.4 gebruik te maak en die eienskap

$$\Sigma_K C_K(\theta/2) = (\mathrm{sp}\theta/2)^k \qquad (1.2.4)$$

is

2.3.15 $\phi(t) = \Sigma_{k=0}(1-2it)^{-f_k/2}P(k) + \mathrm{esp}(-\theta/2)\Sigma_k\Sigma_K\omega_{1k}$
$((1-2it)^{-(f_k+2)/2} - (1-2it)^{-f_k/2})C_K(\theta/2)/k! + O(m^{-2})$

waar $P(k) = \mathrm{esp}(-\theta/2)(\mathrm{sp}\theta/2)^k$.

Deur nou die inverse van $\phi(t)$ te neem (sien Anderson (1958) bls. 206), volg die verdeling van ρM, d.i.

2.3.16 $P(\rho M \leq z) = \Sigma_k P(\chi^2_{f_k} \leq z)P(k) + \mathrm{esp}(-\theta/2)\Sigma_k\Sigma_K\omega_{1k}$
$(P(\chi^2_{f_k+2} \leq z) - P(\chi^2_{f_k} \leq z))C_K(\theta/2)/k! + O(m^{-2})$.

Die waarde van ρ kan gevind word deur in 2.3.14 $\omega_{10}=0$ te stel en vir ρ op te los. Dus

2.3.17 $\rho = 1 + (n-p-1)/2m.$

2.3.16 word nou

2.3.18 $P(\rho M \leq z) = P(-a\log|L| \leq z) = \Sigma_k P(\chi^2_{f_k} \leq z)P(k) + \mathrm{esp}(-\theta/2)$
$\Sigma_k\Sigma_K\omega_{1k}(P(\chi^2_{f_k+2} \leq z) - P(\chi^2_{f_k} \leq z))C_K(\theta/2)/k! + O(m^{-2})$

waar $a = \rho m = m + (n-p-1)/2$ en

2.3.19 $\omega_{1k} = (-1/\rho)((1-\rho+n/m)k + (\Sigma_j K_j^2 - \Sigma_j K_j j)/m).$

Dit bewys die stelling.

Indien $\theta=0$ word 2.3.10

$$P(-a\log|L| \leq z) = P(\chi^2_{f_0} \leq z) + O(m^{-2}),$$

maar in Anderson (1958) is die verdeling afgelei met resterm

$O(m^{-6})$/ ...

$O(m^{-6})$, naamlik

2.3.20 $P(-a\log|L|\leq z) = P(\chi^2_{f_0}\leq z) + \delta_2(P(\chi^2_{f_0+4}\leq z)-P(\chi^2_{f_0}\leq z))/a^2 +$

$\delta_4(P(\chi^2_{f_0+8}\leq z)-P(\chi^2_{f_0}\leq z))/a^4 - \delta_2^2(P(\chi^2_{f_0+4}\leq z)-$

$P(\chi^2_{f_0}\leq z))/a^4 + O(m^{-6})$

waar

$$\delta_2 = np(p^2 + n^2 - 5)/48$$

$$\delta_4 = \delta_2^2/2 + np(3p^4 + 3n^4 + 10p^2n^2 - 50p^2 - 50n^2 + 159)/1920$$

In plaas van $\omega_{10}=0$ te neem, kan, sê $\omega_{1d}=0$ geneem word in 'n poging om die tweede term in 2.3.16 nul of klein te maak. Laat $\tau = (\tau_1,\tau_2,--,\tau_p)$, $\tau_1\geq\tau_2\geq --\geq\tau_p\geq 0$, 'n opsplitsing van d in nie meer as p komponente wees nie. Stel dus $\omega_{1d}=0$ en los op vir ρ, d.i.

2.3.21 $\rho = 1 +(n/(m(np+2d)))(p(n-p-1)/2 +2d) + 2(\Sigma_j\tau_j^2-\Sigma_j\tau_j j)/$

$(m(np+2d))$.

ω_{1k} kan nou geskrywe word as

2.3.22 $\omega_{1k} = (-1/\rho)((1-\rho+n/m)(k-d) + (\Sigma_j K_j^2-\Sigma_j\tau_j^2-\Sigma_j K_j j+$

$\Sigma_j\tau_j j)/m$.

Indien d=0 reduseer 2.3.21 en 2.3.22 na 2.3.17 en 2.3.19 respektiewelik. Indien die waarde van d gevind kan word, wat baie moeilik blyk te wees, kan 2.3.10 geskrywe word as

2.3.23 $P(-a\log|L|\leq z) = \Sigma_{k=0}P(\chi^2_{f_k}\leq z)P(k) + O(m^{-2})$

waar $a=\rho m$ en ρ gedefinieer is in 2.3.21.

Afleiding 2.3.1

Indien $A\sim W(\Sigma,m)$ en $B\sim W(\Sigma,n,\Theta)$, Θ van rang $r<p$, word die asimptotiese verdeling van $|L|$ gegee deur

2.3.24 $P(-a\log|L|\leq z) = \Sigma_{k=0}P(\chi^2_{f_k}\leq z)P(k) + \exp(-\theta_r/2)\Sigma_k\Sigma_K\omega_{1k}$

$(P(\chi^2_{f_k+2}\leq z)-P(\chi^2_{f_k}\leq z))C_K(\theta_r/2)/k! + O(m^{-2})$

waar die/ ...

waar die parameters gedefinieer is in stelling 2.3.1. K is nou 'n opsplitsing van k in nie meer as r komponente nie en Θ_r is van orde r.

Bewys.

Aangesien Θ van rang $r<p$ is, bestaan 'n ortogonale matriks C sodanig dat $C\Theta C' = \begin{pmatrix} \Theta_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Deur van 1.2.10 gebruik te maak, volg die afleiding sondermeer uit 2.3.10.

Alternatiewe bewys.

2.3.24 kan ook bewys word uit 2.2.13 deur $W = |L|^{m/2}$ en $M = -2\log W$ te stel. Die karakteristieke-funksie van ρM kan dus geskrywe word

2.3.25 $$\phi(t) = \Gamma_r(m(1-2it\rho)/2)\Gamma_r((m+n)/2)/(\Gamma_r(m/2)$$
$$\Gamma_r(m(1-2it\rho)/2 +n/2))\ \mathrm{esp}(-\Theta_r/2)\,{}_1F_1((m+n)/2\ ;$$
$$m(1-2it\rho)/2 +n/2\ ;\ \Theta_r/2)\ \prod_{j=r+1}^{p}\Gamma((m+n+1-j)/2)$$
$$\Gamma(m(1-2it\rho)/2 +(1-j)/2)/(\Gamma((m+1-j)/2)$$
$$\Gamma(m(1-2it\rho)/2 +n/2 +(1-j)/2))$$
$$= \phi^1(t)\ \phi^2(t)$$

waar

2.3.26 $$\phi^1(t) = \Gamma_r(m(1-2it\rho)/2)\Gamma_r((m+n)/2)/(\Gamma_r(m/2)$$
$$\Gamma_r(m(1-2it\rho)/2 +n/2))\ \mathrm{esp}(-\Theta_r/2)\,{}_1F_1((m+n)/2\ ;$$
$$m(1-2it\rho)/2 +n/2\ ;\ \Theta_r/2)$$

en

2.3.27 $$\phi^2(t) = \prod_{j=r+1}\Gamma((m+n+1-j)/2)\Gamma(m(1-2it\rho)/2 +(1-j)/2)/$$
$$(\Gamma((m+1-j)/2)\Gamma(m(1-2it\rho)/2 +n/2 +(1-j)/2)).$$

$\phi^1(t)$ is dieselfde as 2.3.11 behalwe dat p nou r is. Dus volgens 2.3.12 is

2.3.28 $\phi^1(t)/$ ...

2.3.28 $\phi^1(t) = \mathrm{esp}(-\Theta_r/2)\Sigma_k\Sigma_K(1-2it)^{-f_k^1/2}(1+T_{1k}^1(t))C_K(\Theta_r/2)/k!$

$+ O(m^{-2})$

waar

$f_k^1 = nr + 2k, \quad T_{1k}^1(t) = \omega_{1k}^1((1-2it)^{-1}-1)$ en

$\omega_{1k}^1 = (-1/2\rho)((1-\rho)f_k^1 + n(r(n-r-1)/2 + 2k)/m + 2(\Sigma_j^r K_j{}^2 - \Sigma_j^r K_j j)/m)$

$\phi^2(t)$ kan ook in die vorm 2.3.7 geskrywe word met $x = m/2$, $\nu_j = (1-j)/2$ en $\gamma_j = n/2$. Dus volgens 2.3.2 is

2.3.29 $\phi^2(t) = (1-2it)^{-f^2/2}(1 + T_1^2(t)) + O(m^{-2})$

waar

$f^2 = n(p-r), \quad T_1^2(t) = \omega_1^2((1-2it)^{-1}-1)$ en

$\omega_1^2 = (-1/2\rho)((1-\rho)f^2 + 2(n^2(p-r)/4 - (p-r)(r+1+p)n/4)/m)$

Deur nou gebruik te maak van 2.3.28 en 2.3.29 kan 2.3.25 geskrywe word as

2.3.30 $\phi(t) = \mathrm{esp}(-\Theta_r/2)\Sigma_k\Sigma_K(1-2it)^{-f_k/2}(1 + T_{1k}(t))$

$C_K(\Theta_r/2)/k! + O(m^{-2})$

waar

2.3.31 $f_k = f_k^1 + f^2 = np + 2k.$

$T_{1k}(t) = T_{1k}^1(t) + T_1^2(t) = \omega_{1k}((1-2it)^{-1}-1)$ en

2.3.33 $\omega_{1k} = \omega_{1k}^1 + \omega_1^2 = (-1/2\rho)((1-\rho)f_k + n(p(n-p-1)/2 + 2k)/m$

$+ 2(\Sigma_j^r K_j{}^2 - \Sigma_j^r K_j j)/m).$

Neem die inverse van 2.3.30 en die afleiding volg. Vergelyk die resultaat 2.3.30 met 2.3.12.

Spesiale aandag is gegee aan afleiding 2.3.1 indien r=1, d.i. die lineêre geval. Tabelle is naamlik bereken waaruit die akkuraatheid van die benadering getoets word aan die hand van eksakte waardes.

Die onderskeidingsvermoë van die $|L|$-toets.

Laat r=1 in 2.3.24. Laat $\Theta_1 = \lambda$ (skalar). Aangesien

$C_K(\lambda/2)/$ ...

$C_K(\lambda/2) = (\lambda/2)^k$, kan 2.3.24 geskrywe word as

$$2.3.33 \quad P(-a\log|L|\leq z) = \Sigma_{k=0}P(\chi^2_{f_k}\leq z)P(k) + \Sigma_{k=0}(P(\chi^2_{f_k+2}\leq z)-$$

$$P(\chi^2_{f_k}\leq z))\omega_{1k}P(k) + O(m^{-2})$$

waar $P(k) = \text{eks}(-\lambda/2)(\lambda/2)^k/k!$, $f_k = np + 2k$,

$\omega_{1k} = (-1/\rho)((1-\rho+n/m)k + (k^2-k)/m)$, $\rho = 1 + (n-p-1)/2m$

en $a = \rho m$.

Veronderstel die hipotese Ho : $\lambda = 0$ met alternatief H_1 : $\lambda \neq 0$. 2.3.33 is dus die verdeling van $-a\log|L|$ onder H_1 terwyl 2.3.20 2.3.30 die verdeling van $-a\log|L|$ onder Ho is. Indien die waarskynlikheid van die tipe I-fout

$$P(I) = P(-a\log|L|/Ho \gtrless z_\alpha) = .05$$

gestel word, dan is waardes van die onderskeidingsvermoë-funksie $\beta_{.05} = 1 - P(II)$,

$$P(II) = P(-a\log|L|/H_1 \leq z_\alpha),$$ bereken en getabuleer.

Tabelle[2].

Voorgaande metodes is gebruik vir die opstel van die volgende tabelle. Tabel 1 gee die boonste 5% waardes van $-a\log|L|$, bereken volgens 2.3.30 vir p=2,3,4, n=4(2)12 en m=50,100,200, INF (INF is vir berekeningsdoeleindes verteenwoordig deur 999). Tabel 2 gee die waardes van die onderskeidingsvermoë-funksie bereken volgens 2.3.33 vir dieselfde waardes van p, n en m en λ=2,6,10,16,28 en 40. Tabel 3 gee 'n vergelyking van die eksakte waardes van $\beta_{.05}$ (Roy (1965)) met die benaderde waardes vir p=2, n=10 en m=50, 100 en INF. Tabel 4 gee 'n ver-

2) Die skrywer wens graag sy dank te betuig aan die Universiteit van die Oranje Vrystaat vir finansiële hulp verleen vir die berekenings en Mnr. L. J. C. Bootha vir die programmering van die materiaal.

gelyking/ ...

gelyking van die eksakte waardes, χ^2-benadering, gamma-benadering en die Jacobi-reeks benadering (Roy (1965)) vir p=2, n=4 en m=50, 100.

Uit tabel 3 blyk dat die benadering goed is en volgens tabel 4 blyk die benadering selfs beter te wees as die ander benaderings vir λ=10.

Tabel 1.

BOONSTE 5% WAARDES VAN -aLOG|L| MET p VERANDERLIKES EN m EN n GRADE VAN VRYHEID.

p = 2

n / m	4	6	8	10	12
50	15.517707	21.055036	26.358241	31.520915	36.591834
100	15.510485	21.033507	26.312565	31.439794	36.462897
200	15.508650	21.027942	26.300528	31.417964	36.427542
INF	15.508061	21.026134	26.296546	31.410698	36.415596

p = 3

n / m	4	6	8	10	12
50	21.043612	28.914605	36.507109	43.933948	51.253291
100	21.030440	28.880808	36.438911	43.815423	51.066769
200	21.027155	28.872182	36.421585	43.783938	51.016214
INF	21.026097	28.869388	34.415334	43.773473	50.999246

p = 4

n / m	4	6	8	10	12
50	26.326168	36.482469	46.323383	55.977935	65.512777
100	26.303734	36.432046	46.227379	55.815837	65.261580
200	26.298209	36.419350	46.202668	55.773217	65.194250
INF	26.296451	36.415260	46.194614	55.759164	65.171826

Tabel 2.

CHI-KWADRAAT BENADERING VIR DIE ONDERSKEIDINGSVERMOë VAN DIE |L|-TOETS IN DIE LINEêRE GEVAL MET p VERANDERLIKES, NIE-SENTRALE PARAMETER λ EN m EN n GRADE VAN VRYHEID.

$p = 2$

n=4 λ	2	6	10	16	28	40
m						
50	0.11963	0.31120	0.52011	0.76949	0.96921	0.99758
100	.12538	.33401	.55389	.79941	.97619	.99829
200	.12822	.34540	.57079	.81437	.97968	.99864
INF	.13047	.35451	.58431	.82636	.98248	.99892
n=6						
50	.10196	.24811	.42326	.67010	.93530	.99259
100	.10771	.27236	.46389	.71421	.95071	.99485
200	.11052	.28452	.48434	.73643	.95846	.99599
INF	.11274	.29425	.50077	.75430	.96470	.99691
n=8						
50	.09141	.20843	.35551	.58633	.89362	.98388
100	.09736	.23342	.40046	.64219	.91967	.98897
200	.10022	.24596	.42318	.67045	.93280	.99152
INF	.10243	.25600	.44147	.69328	.94340	.99357
n=10						
50	.08409	.18078	.30527	.51581	.84717	.97115
100	.09039	.20631	.35316	.58131	.88525	.98045
200	.09335	.21912	.37744	.61456	.90446	.98510
INF	.09559	.22934	.39701	.64148	.92002	.98887
n=12						
50	.07849	.16012	.26635	.45599	.79809	.95437
100	.08526	.18617	.31641	.52947	.84905	.96935
200	.08837	.19921	.34184	.56686	.87471	.97680
INF	.09066	.20957	.36233	.59718	.89555	.98283

p = 3

n	m \ λ	2	6	10	16	28	40
n=4	50	0.10288	0.25047	0.42615	0.67231	0.93575	0.99263
	100	.10819	.27378	.46577	.71580	.95111	.99490
	200	.11077	.28528	.48539	.73735	.95870	.99603
	INF	.11278	.29441	.50099	.75451	.96475	.99691
n=6	50	.08928	.19838	.33567	.55665	.87351	.97851
	100	.09443	.22141	.37921	.61470	.90441	.98533
	200	.09688	.23281	.40090	.64366	.91979	.98872
	INF	.09878	.24187	.41822	.66684	.93211	.99143
n=8	50	.08115	.16707	.27701	.46844	.80470	.56055
	100	.08645	.18978	.32224	.53647	.85273	.97025
	200	.08890	.20102	.34486	.57058	.87671	.97729
	INF	.09076	.20993	.36295	.59796	.89598	.98294
n=10	50	.07540	.14573	.23567	.39975	.73491	.92604
	100	.08106	.16834	.28174	.47475	.80015	.95019
	200	.08361	.17949	.30483	.51250	.83275	.96214
	INF	.08547	.18827	.32329	.54287	.85902	.97175
n=12	50	.07088	.12995	.20475	.34500	.66716	.88974
	100	.07707	.15267	.25134	.42505	.74892	.92606
	200	.07977	.16381	.27471	.46544	.78976	.94394
	INF	.08168	.17252	.29336	.49796	.82273	.95833

p = 4

n=4 λ / m	2	6	10	16	28	40
50	0.09308	0.21263	0.36097	0.59103	0.89488	0.98404
100	.09820	.23596	.40411	.64572	.92083	.98914
200	.10063	.24733	.42523	.67253	.93352	.99163
INF	.10251	.25629	.44192	.69374	.94358	.99360
n=6						
50	.08191	.16886	.27948	.47089	.80562	.95622
100	.08681	.19085	.32391	.53838	.85365	.97045
200	.08907	.20159	.34580	.57171	.87730	.97743
INF	.09079	.21005	.36316	.59822	.89612	.98297
n=8						
50	.07514	.14317	.22925	.38604	.71572	.91576
100	.08020	.16431	.27349	.46070	.78528	.94332
200	.08246	.17460	.29538	.49777	.81965	.95683
INF	.08412	.18267	.31273	.52735	.84711	.96761
n=10						
50	.07025	.12578	.19489	.32355	.63148	.86598
100	.07571	.14654	.23869	.40236	.72049	.90992
200	.07807	.15658	.26038	.44164	.76455	.93142
INF	.07974	.16439	.27755	.47302	.79984	.94861
n=12						
50	.06631	.11288	.16963	.27578	.55500	.81010
100	.07236	.13363	.21306	.35707	.66104	.87244
200	.07488	.14359	.23457	.39772	.71355	.90280
INF	.07659	.15124	.25154	.43020	.75568	.92710

Tabel 3.

VERGELYKING VAN EKSAKTE WAARDES EN CHI-KWADRAAT BENADERING VAN DIE ONDERSKEIDINGSVERMOë-FUNKSIE VAN $|L|$ VIR $p=2$ EN $n=10$.

m	50		100		INF	
λ	Exact	χ^2	Exact	χ^2	Exact	χ^2
2	0.0874	0.0841	0.0913	0.0904	0.0961	0.0956
6	.1910	.1808	.2092	.2063	.2319	.2293
10	.3208	.3053	.3574	.3532	.4019	.3970
16	.5257	.5158	.5835	.5813	.6483	.6415
28	.8283	.8472	.8797	.8853	.9240	.9200
40	.9545	.9712	.9765	.9805	.9828	.9889

Tabel 4

VERGELYKING VAN EKSAKTE WAARDES, CHI-KWADRAAT BENADERING, GAMMA-BENADERING EN JACOBI-REEKS BENADERING VAN DIE ONDERSKEIDINGSVERMOë-FUNKSIE VAN $|L|$ VIR $p=2$ EN $n=4$.

m=50 λ	Exact	χ^2	Gamma	Jacobi
2	0.1209	0.1196	0.1212	0.1201
10	.5225	.5201	.5033	.5017
m=100				
2	.1257	.1254	.1261	.1244
10	.5545	.5539	.5469	.5388

Stelling 2.3.2

Indien $A \sim W(\Sigma,m)$ en $B \sim W(\Sigma,n,\Theta)$, Θ van rang p, dan word die asimptotiese verdeling van $|I-L|$ gegee deur

2.3.34 $P(-a\log|I-L|\leq z) = P(\chi_f^2\leq z) + O(n^{-2})$

waar $a=n+(m-p-1)/2 + 2d/p$, $d = sp(\Theta/2)$ en $f = mp$.

Bewys.

Stel $V = |I-L|^{n/2}$ en $M = -2\log V$. Die karakteristieke funksie van ρM word dan volgens 2.2.4 gegee deur

2.3.35 $\phi_{\rho M}(t)/$ ...

2.3.35 $\phi(t) = E|I-L|^{-it\rho n}$

$$= \mathrm{esp}(-\theta/2)\Sigma_k\Sigma_K[\Gamma_p((m+n)/2,K)\Gamma_p(n(1-2it\rho)/2,K)/$$

$$\Gamma_p(n/2,K)\Gamma_p(n(1-2it\rho)/2 + m/2,K)]C_K(\theta/2)/k!.$$

Die term in vierkante hakies is van die vorm 2.3.7 met $x = m/2$, $\nu_j = (1-j)/2 + K_j$ en $\gamma_j = m/2$. Dus

2.3.36 $f = mp$

2.3.37 $\omega_{1k} = (-1/2\rho)(m(mp-p^2+4k-p)/2n + (1-\rho)f)$

Kies $\omega_{1d} = 0$ (d enige heelgetal) en los op vir ρ, d.i.

2.3.38 $\rho = 1 + 2d/np + (m-p-1)/2n.$

ω_{1k} kan derhalwe geskrywe word as

2.3.39 $\omega_{1k} = m(d-k)/a, \quad a = n\rho.$

Aangesien f onafhanklik is van k en ω_{1k} onafhanklik is van K, kan 2.3.35 geskrywe word, deur gebruik te maak van 2.3.2 en 1.2.4, as

$$\phi(t) = \mathrm{esp}(-\theta/2)\Sigma_k\Sigma_K(1-2it)^{-f/2}(1 + T_{1k}(t))C_K(\theta/2)/k! + O(n^{-2})$$

$$= (1-2it)^{-f/2} + \mathrm{esp}(-\theta/2)((1-2it)^{-(f+2)/2}-(1-2it)^{-f/2})$$

$$\omega_{1k}C_K(\theta/2)/k! + O(n^{-2})$$

waar ω_{1k} gegee word in 2.3.39. Maar $\Sigma_k k(\mathrm{sp}(\theta/2))^k = \mathrm{sp}(\theta/2)$ en dus kan die karakteristieke funksie geskrywe word as

2.3.40 $\phi(t) = (1-2it)^{-f/2} + ((1-2it)^{-(f+2)/2}-(1-2it)^{-f/2})$

$$m(d-\mathrm{sp}(\theta/2))/a + O(n^{-2}).$$

Stel $d=\mathrm{sp}(\theta/2)$ en die tweede term is nul. Maak gebruik van die inverse-stelling en die stelling is bewys.

Aangesien d 'n heelgetal moet wees, moet daarop gelet word dat $\mathrm{sp}(\theta/2)$ 'n heelgetal moet wees indien enige berekenings gemaak word. In die praktyk sal θ gewoonlik onbekend wees en moet dus deur sy beramer, sê $\hat{\theta}$, vervang word waarvan $\mathrm{sp}(\hat{\theta}/2)$ nie noodwendig 'n heelgetal gaan wees nie. Die

tweede term/ ...

tweede term in 2.3.40 sal dus net klein gemaak kan word indien d gelyk aan die naaste heelgetal aan $sp(\hat{\Theta}/2)$ geneem word.

Indien Θ van rang $r<p$ is, is dit duidelik na analogie van die bewys van afleiding 2.3.1 dat 2.3.34 dieselfde bly behalwe dat $d = sp(\Theta_r/2)$ en in die besonder as Θ van rang een is, d.i. $\Theta_1 = \lambda$, dan is $d = \lambda/2$.

Stelling 2.3.3

Indien $A \sim W(\Sigma,m,\Theta)$ en $B \sim W(\Sigma,n)$, Θ van rang p, dan word die asimptotiese verdeling van $|L|$ gegee deur

2.3.41 $P(-a\log|L|\leq z) = P(\chi^2_f \leq z) + O(m^{-2})$

waar $a = n + 2d/p + (n-p-1)/2$, $d = sp(\Theta/2)$ en $f = np$.

Bewys.

Stel $W = |L|^{m/2}$ en $M = -2\log W$. Volgens 2.2.17 word die karakteristieke funksie van ρM gegee deur

2.3.42 $\phi(t) = esp(-\Theta/2)\Sigma_k\Sigma_K[\Gamma_p((m+n)/2,K)\Gamma_p(m(1-2it\rho)/2,K)/$

$$\Gamma_p(m/2,K)\Gamma_p(m(1-2it\rho)/2+n/2,K)]C_K(\Theta/2)/k!.$$

Dit is van die vorm 2.3 35 met $x = m/2$, $\nu_j = K_j + (1-j)/2$, $\gamma_j = n/2$. Deur dus m en n net om te ruil in stelling 2.3.2, volg die stelling.

Stelling 2.3.4

Indien $A \sim W(\Sigma,m,\Theta)$, Θ van rang p, en $B \sim W(\Sigma,n)$ word die asimptotiese verdeling van $|I-L|$ gegee deur

2.3.43 $P(-a\log|I-L|\leq z) = \Sigma_k P(\chi^2_{f_k} \leq z)P(k) + esp(-\Theta/2)\Sigma_k\Sigma_K$

$$(P(\chi^2_{f_k+2} \leq z) - P(\chi^2_{f_k} \leq z))\omega_{1k}C_K(\Theta/2)/k! + O(n^{-2}),$$

waar $a = n\rho$, $\rho = 1 + (m-p-1)/2n$, $f_k = mp + 2k$, $P(k) = esp(\Theta/2)$ $(sp\Theta/2)^k/k!$ en $\omega_{1k} = (-1/\rho)((1-\rho+m/n)k + (\Sigma_j K_j^2 - \Sigma_j K_j j)/m)$.

Bewys/ ...

Bewys.

Stel $V = |I-L|^{n/2}$ en $M = -2\log V$. Volgens 2.2.18 word die karakteristieke funksie van ρM gegee deur

2.3.44 $$\phi(t) = \mathrm{esp}(-\Theta/2)\Sigma_k\Sigma_K[\Gamma_p((m+n)/2,K)\Gamma_p(n(1-2it\rho)/2)/$$
$$\Gamma_p(n/2)\Gamma_p(n(1-2it\rho)/2 + m/2,K)]C_K(\Theta/2)/k!.$$

Dit is weer van dieselfde vorm as 2.3.11 met $x = n/2$, $\nu_j = (1-j)/2$, $\gamma_j = m/2 + K_j$. Deur dus m en n om te ruil in stelling 2.3.1 volg die stelling.

Afleiding 2.3.2

Indien $A \sim W(\Sigma,m,\Theta)$, Θ van rang $r<p$, en $B \sim W(\Sigma,n)$ dan word die asimptotiese verdeling van $|I-L|$ gegee deur

2.3.45 $$P(-a\log|I-L|\leq z) = \Sigma_k P(\chi^2_{f_k}\leq z)P(k) + \mathrm{esp}(-\Theta_r/2)\Sigma_k\Sigma_K$$
$$(P(\chi^2_{f_k+2}\leq z)-P(\chi^2_{f_k}\leq z))\omega_{1k}C_K(\Theta_r/2)/k! + O(n^{-2})$$

waar die parameters gedefinieer is in stelling 2.3.4 met $P(k) = \mathrm{esp}(-\Theta_r/2)(\mathrm{sp}\Theta_r/2)^k/k!$.

Bewys.

Soortgelyk as die bewys vir afleiding 2.3.1.

Stelling 2.3.5

Indien $A \sim W(\Sigma_1,m)$ en $B \sim W(\Sigma_2,n)$ word die asimptotiese verdeling van $|L|$ gegee deur

2.3.46 $$P(-a\log|L|\leq z) = P(\chi^2_f\leq z) + (P(\chi^2_{f+2}\leq z)-P(\chi^2_f\leq z))|\Sigma_1^{-1}\Sigma_2|^{m/2}$$
$$\Sigma_k\Sigma_K\omega_{1k}(m/2)_K C_K(I-\Sigma_1^{-1}\Sigma_2)/k! + O(m^{-2})$$

waar $a = m\rho$, $\rho = 1 + (n-p-1)/2m$, $f = np$ en

$$\omega_{1k} = (-1/2\rho)(n(np-p^2+4k-p)/2m + (1-\rho)f)$$

Bewys.

Stel $W = |L|^{m/2}$ en $M = -2\log W$. Volgens 2.2.4 word die karakteristieke funksie van ρM gegee deur

2.3.47 $\phi(t)/$ ...

2.3.47 $\phi(t) = |\Sigma_1^{-1}\Sigma_2|^{m/2}\Sigma_k\Sigma_K(m/2)_K[\Gamma_p((m+n)/2,K)$

$\Gamma_p(m(1-2it\rho)/2,K)/\Gamma_p(m/2,K)\Gamma_p(m(1-2it\rho)/2+n/2,K)]$

$C_K(I-\Sigma_1^{-1}\Sigma_2)/k!.$

Die term tussen vierkante-hakies is van die vorm 2.3.7 met $x = m/2$, $\nu_j = K_j + (1-j)/2$ en $\gamma_j = n/2$. Dus

2.3.48 $\omega_{1k} = (-/2\rho)(n(np-p^2+4k-p)/2m + (1-\rho)f)$

en $f = np$. Deur van 2.3.2 gebruik te maak, kan $\phi(t)$ geskrywe word as

2.3.49 $\phi(t) = |\Sigma_1^{-1}\Sigma_2|^{m/2}(1-2it)^{-f/2}\Sigma_k\Sigma_K(m/2)_K C_K(I-\Sigma_1^{-1}\Sigma_2)/k!$

$+ |\Sigma_1^{-1}\Sigma_2|^{m/2}((1-2it)^{-(f+2)/2}-(1-2it)^{-f/2})\Sigma_k\Sigma_K$

$(m/2)_K C_K(I-\Sigma_1^{-1}\Sigma_2)/k! + O(m^{-2}).$

As gebruik gemaak word van 1.2.11 en dan die inverse van 2.3 49 geneem word, word die stelling verkry.

Dit sou interessant wees as die waarde van

$$\Sigma_k\Sigma_K k(m/2)_K C_K(I-\Sigma_1^{-1}\Sigma_2)/k!$$

bekend was, aangesien die tweede term in 2.3.46 nul gemaak kan word op 'n soortgelyke metode as in stelling 2.3.2, maar hierdie waarde kon nog nie gevind word nie.

Stelling 2.3.6

Indien $A \sim W(\Sigma_1,m)$ en $B \sim W(\Sigma_2,n)$ word die asimptotiese verdeling van $|I-L|$ gegee deur

2.3.50 $P(-a\log|I-L|\leq z) = |\Sigma_1^{-1}\Sigma_2|^{m/2}\ \Sigma_k\Sigma_K P(\chi^2_{f_k}\leq z)(m/2)_K$

$C_K(I-\Sigma_1^{-1}\Sigma_2)/k! + |\Sigma_1^{-1}\Sigma_2|^{m/2}\Sigma_k\Sigma_K(m/2)_K\omega_{1k}$

$(P(\chi^2_{f_k+2}\leq z)-P(\chi^2_{f_k}\leq z))C_K(I-\Sigma_1^{-1}\Sigma_2)/k! + O(n^{-2})$

waar $a = \rho n$, $\rho = 1 + (m-p-1)/2n$, $f_k = mp + 2k$ en

$\omega_{1k} = (-1/\rho)((1-\rho+m/n)k + (\Sigma_j K_j^2-\Sigma_j K_j j)/n).$

Bewys/ ...

Bewys.

Die karakteristieke funksie van $-a\log|I-L|$ word volgens 2.2.25 gegee deur

2.3.51 $$\phi(t) = |\Sigma_1^{-1}\Sigma_2|^{m/2}\Sigma_k\Sigma_K(m/2)_K[\Gamma_p((m+n)/2,K)$$
$$\Gamma_p(n(1-2it\rho)/2)/\Gamma_p(n(1-2it\rho)/2 +m/2,K)\Gamma_p(n/2)]$$
$$C_K(I-\Sigma_1^{-1}\Sigma_2)/k!.$$

Die term tussen vierkante hakies is van die vorm 2.3.7 met $x = n/2$, $\nu_j = (1-j)/2$, $\gamma_j = m/2 + K_j$. Derhalwe is $f_k = mp+2k$ en $\omega_{1k} = (-1/2\rho)((1-\rho)f_k + m(p(m-p-1)/2 +2k)/n + 2(\Sigma_j K_j^2-\Sigma jK_j j)/n)$. Die waarde van ρ word gevind deur $\omega_{10} = 0$ te stel en vir ρ op te los. Deur weer die term tussen vierkante hakies met 2.3.? te vervang en die inverse te neem, volg die stelling.

2.4 Die verdeling van die grootste karakteristieke wortel van L.

In hierdie paragraaf sal eerstens die gesamentlike verdeling van die karakteristieke wortels $l_1, l_2, --, l_p$, $1>l_1>l_2>-->l_p>0$, van L afgelei word wat reeds in sommige gevalle bekend is. Hier word die verdelings egter uit die verdeling van L afgelei. Die verdeling van die grootste wortel sal dan uit die gesamentlike verdeling van die wortels afgelei word.

Stelling 2.4.1

Indien $A\sim W(\Sigma,m)$ en $B\sim W(\Sigma,n,\Theta)$, Θ van rang p, dan word die gesamentlike verdelingsfunksie van die karakteristieke wortels van L gegee deur

2.4.1 $$f(\Delta) = \pi^{p^2/2}\Gamma_p((m+n)/2)/(\Gamma_p(p/2)\Gamma_p(m/2)\Gamma_p(n/2)).\mathrm{esp}(-\Theta/2)$$
$$|\Delta|^{(m-p-1)/2}|I-\Delta|^{(n-p-1)/2}\ \alpha_p(\Delta)$$
$$_1F_1((m+n)/2\ ;\ n/2\ ;\ \Theta/2,I-\Delta),\quad I>\Delta>0,$$

waar/ ...

waar $\Delta = \mathrm{diag}(l_1, l_2, --, l_p)$ en $\alpha_p(\Delta) = \prod_{i<j}^{p}(l_i - l_j)$.

Bewys.

Daar bestaan 'n ortogonale matriks H sodanig dat

$$H'LH = \mathrm{diag}(l_1, --, l_p) = \Delta.$$

Die jakobiaan van die transformasie word gegee deur (James (1954))

2.4.2 $\quad dL = \alpha_p(\Delta)\, d\Delta\, d(H)$.

Onder die transformasie, saam met 1.2.8, kan die gesamentlike verdeling van die wortels van L uit 2.2.1 geskrywe word as

$$f(\Delta) = \pi^{p^2/2}/(\Gamma_p(p/2)\Gamma_p(m/2)\Gamma_p(n/2)|2\Sigma|^{(m+n)/2})\ \mathrm{esp}(-\Theta/2)$$

$$|\Delta|^{(m-p-1)/2}|I-\Delta|^{(n-p-1)/2}\ \alpha_p(\Delta) \int_{T>0} \mathrm{esp}(-\Sigma^{-1}T/2)$$

$$|T|^{(m+n-p-1)/2} \int_{O(p)} {}_0F_1(n/2\ ; \tfrac{1}{4}\Theta\Sigma^{-1}T^{1/2}H(I-\Delta)H'T^{1/2})d(H)dT.$$

Deur gebruik te maak van die eienskappe 1.2.5 en 1.2.9, kan die integraal na H geskrywe word as

$$\int_{O(p)} {}_0F_1(n/2\ ; \tfrac{1}{4}\Theta\Sigma^{-1}T^{1/2}H(I-\Delta)H'T^{1/2})d(H)$$

$$= {}_0F_1(n/2\ ;\ \Theta\Sigma^{-1}T/4, I-\Delta).$$

Integrasie na T is nou uitvoerbaar volgens 1.3.4 en voltooi die bewys. Die verdeling 2.4.1 kan uit die verdeling wat deur Constantine (1963) afgelei is, herlei word.

Afleiding 2.4.1

Indien $A \sim W(\Sigma, m)$ en $B \sim W(\Sigma, n, \Theta)$, Θ van rang $r<p$, word die gesamentlike verdelingsfunksie van die wortels van L gegee deur

2.4.3 $$f(\Delta) = \pi^{p^2/2}\Gamma_p((m+n)/2)/(\Gamma_p(p/2)\Gamma_p(m/2)\Gamma_p(n/2))\mathrm{esp}(-\Theta_r/2)$$

$$|\Delta|^{(m-p-1)/2}|I-\Delta|^{(n-p-1)/2}\ \alpha_p(\Delta)\ \Sigma_k\Sigma_K((m+n)/2)_K$$

$$C_K(\Theta_r/2)C_K(I-\Delta)/(n/2)_K C_K(I_p)k!$$

waar $K = (K_1, --, K_r)$ 'n opsplitsing van k in nie meer as r

komponente/ ...

komponente is nie.

Bewys.

Aangesien Θ van rang $r<p$ is, bestaan 'n ortogonale matriks C sodanig dat $C\Theta C' = \begin{pmatrix} \Theta_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Deur hiervan en van 1.2.10 in 2.4.1 gebruik te maak, volg die afleiding.

Indien $r=1$, d.i. die nie-sentrale parameter $\Theta_1 = \lambda$ is 'n skalar, dan kan die sonale-polinoom in 'n eksplisiete vorm geskrywe word. Die opsplitsing $K = (k,0,--,0) = (k)$ bestaan nou uit net een komponent en die verdeling word

2.4.4 $$f(\Delta) = \pi^{p^2/2}\Gamma_p((m+n)/2)/(\Gamma_p(p/2)\Gamma_p(m/2)\Gamma_p(n/2))\ e^{-\lambda/2} |\Delta|^{(m-p-1)/2}|I-\Delta|^{(n-p-1)/2}\ \alpha_p(\Delta)\ \Sigma_k((m+n)/2)_k (\lambda/2)^k C_{(k)}(I-\Delta)/(n/2)_k C_{(k)}(I_p)k!$$

waar (Constantine (1963))

2.4.5 $$C_{(k)}(I_p) = 2^{2k}k!(p/2)_k/(2k)!$$

'n Eksplisiete uitdrukking vir $C_{(k)}(I-\Delta)$ is gevind deur Rubin (1962) en word ook gegee in James (1964).

Afleiding 2.4.1 kan ook op 'n omslagtige metode bewys word vanuit die verdeling van L soos gegee in 2.2.1 en sal nie hier gegee word nie.

Stelling 2.4.2

Indien $A \sim W(\Sigma,m)$ en $B \sim W(\Sigma,n,\Theta)$, Θ van rang p, word die verdelingsfunksie van die grootste karakteristieke wortel l_1 van L gegee deur

2.4.6 $$f(l_1) = \Gamma_p((m+n)/2)\Gamma_p((p+1)/2)/(\Gamma_p(n/2)\Gamma_p((m+p+1)/2)) \mathrm{esp}(-\Theta/2)\Sigma_k\Sigma_K\Sigma_j\Sigma_J\Sigma_{\tau\leq K}\Sigma_\delta\ a_\tau\ g^{\delta}_{\tau,J}\ l_1^{(mp/2\ +t+j-1)} (mp/2\ +t+j)((m+n)/2)_K((-n+p+1)/2)_J(m/2)_\delta C_K(\Theta/2) C_\delta(I_p)/(n/2)_K((m+p+1)/2)_\delta C_K(I_p)k!j!,\quad 0<l_1<1.$$

Bewys/ ...

Bewys.

Substitueer in 2.4.1

$$x_{i-1} = l_i/l_1, \quad i=2,--,p,$$

en laat

$$X = \mathrm{diag}(x_1,x_2,--,x_{p-1})$$

$$X^1 = \mathrm{diag}(1,x_1,--,x_{p-1}).$$

Die jakobiaan van die transformasie is

$$J(\Delta \to l_1,X) = l_1^{p-1}.$$

Onder die substitusie is

$$|\Delta| = l_1^{p}|X|$$

$$|I-\Delta|^{(n-p-1)/2} = {}_1F_0((-n+p+1)/2\ ;\ \Delta)$$

$$= \Sigma_j\Sigma_J((-n+p+1)/2)_J C_J(l_1X^1)$$

$$\alpha_p(\Delta) = l_1^{p(p-1)/2}|I-X|\alpha_{p-1}(X)$$

$$C_K(I-\Delta) = \Sigma_{\tau\leq K}a_\tau C_\tau(\Delta) \quad \text{(James (1964))}$$

$$= \Sigma_{\tau\leq K}a_\tau C_\tau(l_1X^1) \quad (a_\tau \text{ 'n konstante})$$

Die gesamentlike verdeling van l_1 en X is dus

2.4.7 $$f(l_1,X) = \pi^{p^2/2}\Gamma_p((m+n)/2)/(\Gamma_p(p/2)\Gamma_p(m/2)\Gamma_p(n/2))$$

$$\mathrm{esp}(-\theta/2)l_1^{mp/2\ -1}|X|^{(m-p-1)/2}|I-X|\alpha_{p-1}(X)$$

$$\Sigma_k\Sigma_K\Sigma_j\Sigma_J\Sigma_{\tau\leq K}a_\tau((m+n)/2)_K((-n+p+1)/2)_J$$

$$C_K(\theta/2)C_\tau(l_1X^1)C_J(l_1X^1)/(n/2)_K C_K(I_p)k!j!,$$

$$0<l_1<1,\ 0<X<I.$$

Deur gebruik te maak van 1.2.6 is die integraal na X

2.4.8 $$\int_0^I |X|^{(m-p-1)/2}|I-X|\alpha_{p-1}(X)C_\tau(X^1)C_J(X^1)dX.$$

Constantine (1966) gee egter die volgende verwantskap:

2.4.9 $$C_\tau(X^1)C_J(X^1) = \Sigma_\delta\ g_{\tau,J}^{\delta}C_\delta(X^1)$$

waar δ 'n opsplitsing van t+j in nie meer as p komponente is

nie/ ...

nie (τ is 'n opsplitsing van t). $g_{\tau,J}^{\delta}$ is 'n konstante term en is getabuleer deur Khatri en Pillai (1968) vir waardes van $\delta = 1(1)7$.

Na substitusie van 2.4.9 in 2.4.8 volg die integraal (Sugiyama (1967))

2.4.10 $\int_0^I |X|^{(m-p-1)/2}|I-X|\alpha_{p-1}(X)C_\delta(X^1)dX$

$= (mp/2 + t+j)\Gamma_p(p/2)\Gamma_p(m/2,\delta)\Gamma_p((p+1)/2)C_\delta(I_p)/$

$\pi^{p^2/2}\Gamma_p((m+p+1)/2,\delta)$.

Derhalwe is

2.4.11 $\int_0^I |X|^{(m-p-1)/2}|I-X|\alpha_{p-1}(X)C_\tau(X^1)C_J(X^1)dX$

$= \Sigma_\delta\ g_{\tau,J}^{\delta}(mp/2 + t+j)\Gamma_p(p/2)\Gamma_p(m/2,\delta)\Gamma_p((p+1)/2)C_\delta(I_p)/$

$\pi^{p^2/2}\Gamma_p((m+p+1)/2,\delta)$.

Integrasie na X volgens hierdie integraal in die gesamentlike verdeling van l_1 en X (2.4.7) lewer die stelling.

Uit 2.4.6 volg nou

2.4.12 $P(l_1 \leq z) = \Gamma_p((m+n)/2)\Gamma_p((p+1)/2)/(\Gamma_p(n/2)\Gamma_p((m+p+1)/2))$

$esp(-\Theta/2)\Sigma_k\Sigma_K\Sigma_j\Sigma_J\Sigma_{\tau\leq K}\Sigma_\delta a_\tau g_{\tau,J}^{\delta} z^{mp/2 + t+j}$

$((m+n)/2)_K((-n+p+1)/2)_J(m/2)_\delta C_K(\Theta/2)C_\delta(I_p)/$

$(n/2)_K((m+p+1)/2)_\delta C_K(I_p)k!j!$.

Die geval Θ van rang r<p kan sondermeer gevind word deur Θ te vervang deur Θ_r.

<u>Stelling 2.4.3</u>

Indien $A\sim W(\Sigma,m,\Theta)$, Θ van rang p, en $B\sim W(\Sigma,n)$ word die gesamentlike verdeling van die karakteristieke wortels van L gegee deur

2.4.13 f(Δ)/ ...

$$2.4.13 \quad f(\Delta) = \pi^{p^2/2}\Gamma_p((m+n)/2)/(\Gamma_p(p/2)\Gamma_p(n/2)\Gamma_p(m/2))$$
$$\text{esp}(-\Theta/2)|\Delta|^{(m-p-1)/2}|I-\Delta|^{(n-p-1)/2}\alpha_p(\Delta)$$
$$_1F_1((m+n)/2\ ;\ m/2\ ;\ \Theta/2,\Delta),\quad 0<\Delta<I.$$

Bewys.

Deur 2.2.15 te beskou, is die bewys soortgelyk as dié vir stelling 2.4.1. Hierdie verdeling is ook deur Constantine (1963) afgelei.

Indien Θ van rang $r<p$ is, kan soortgelyk as in afleiding 2.4.1 te werk gegaan word.

Stelling 2.4.4

Indien $A\sim W(\Sigma,m,\Theta)$, Θ van rang p, en $B\sim W(\Sigma,n)$ word die verdeling van die grootste wortel l_1 van L gegee deur

$$2.4.14 \quad f(l_1) = \Gamma_p((m+n)/2)\Gamma_p((p+1)/2)/(\Gamma_p((m+p+1)/2)\Gamma_p(n/2))$$
$$\text{esp}(-\Theta/2)\Sigma_k\Sigma_K\Sigma_j\Sigma_J\Sigma_\delta\ g^{\delta}_{K,J}l_1^{mp/2\ +k+j-1}$$
$$(mp/2\ +k+j)((m+n)/2)_K((-n+p+1)/2)_J(m/2)_\delta C_\delta(I_p)$$
$$C_K(\Theta/2)/(m/2)_K((m+p+1)/2)_\delta C_K(I_p)k!j!,\quad 0<l_1<1.$$

Bewys.

Onder dieselfde substitusie as in die bewys van stelling 2.4.2 is $C_K(\Delta) = l_1^{\,k}C_K(X^1)$. Die gesamentlike verdeling van l_1 en X volg dus uit 2.4.13 as

$$f(l_1,X) = \pi^{p^2/2}\Gamma_p((m+n)/2)/(\Gamma_p(p/2)\Gamma_p(m/2)\Gamma_p(n/2))\ \text{esp}(-\Theta/2)$$
$$|X|^{(m-p-1)/2}|I-X|\alpha_{p-1}(X)\Sigma_k\Sigma_K\Sigma_j\Sigma_J l_1^{mp/2\ +k+j-1}$$
$$((m+n)/2)_K((-n+p+1)/2)_J C_K(\Theta/2)C_K(X^1)C_J(X^1)/((m/2)_K$$
$$C_K(I_p)k!j!).$$

Integreer na X volgens 2.4.11 en die stelling is bewys.

Uit 2.4.14 volg nou dat

2.4.15 $P(l_1 \leq z) = \Gamma_p((m+n)/2)\Gamma_p((p+1)/2)/(\Gamma_p((m+p+1)/2)\Gamma_p(n/2))$
$\mathrm{esp}(-\Theta/2)\Sigma_k\Sigma_K\Sigma_j\Sigma_J\Sigma_\delta\ g_{K,J}^{\delta}\ z^{mp/2\ +k+j}((m+n)/2)_K$
$((-n+p+1)/2)_J(m/2)_\delta C_K(\Theta/2)C_\delta(I_p)/((m/2)_K$
$((m+p+1)/2)_\delta C_K(I_p)k!j!)$.

As Θ van rang $r<p$ is, bly 2.4.15 dieselfde behalwe dat Θ deur Θ_r vervang word en K dan slegs uit r komponente bestaan.
In die besonder as Θ van rang een is, d.i. $\Theta_1 = \lambda$, word 2.4.15

2.4.16 $P(l_1 \leq z) = \Gamma_p((m+n)/2)\Gamma_p((p+1)/2)/(\Gamma_p((m+p+1)/2)\Gamma_p(n/2))$
$e^{-\lambda/2}\ \Sigma_k\Sigma_j\Sigma_J\Sigma_\delta\ g_{(k),J}^{\delta}\ z^{mp/2\ +k+j}((m+n)/2)_k$
$((-n+p+1)/2)_J(m/2)_\delta(\lambda/2)^k C_\delta(I_p)/((m/2)_k$
$((m+p+1)/2)_\delta C_{(k)}(I_p)k!j!)$.

Indien $\Theta = 0$, d.i. die sentrale geval, word 2.4.15

$$P(l_1 \leq z) = \Gamma_p((m+n)/2)\Gamma_p((p+1)/2)/(\Gamma_p((m+p+1)/2)\Gamma_p(n/2))\Sigma_j\Sigma_J$$
$$z^{mp/2\ +j}((-n+p+1)/2)_J(m/2)_J C_J(I_p)/((m+p+1)/2)_J j!$$

soos gegee deur Sugiyama (1967).

Die verdeling van l_1 is egter reeds deur Khatri en Pillai (1968) afgelei in die nie-sentrale geval, maar in 'n veel meer gekompliseerde vorm as 2.4.14. Bogenoemde skrywers het naamlik die volgende verdeling gedefinieer:

$$f(l_1) = \Gamma(1/2)\Gamma_p((m+n)/2)\Gamma_{p-1}((p+2)/2)/(\Gamma_{p-1}((m+p+1)/2)\Gamma_p(n/2))$$
$$\Gamma(m/2)\Gamma(p/2))\ \mathrm{esp}(-\Theta/2)l_1^{mp/2\ -1}(1-l_1)^{(n-p-1)/2}$$
$$\Sigma_k\Sigma_K\Sigma_t^k\Sigma_T\Sigma_j\Sigma_J\Sigma_\delta\ b_{K,T}\ g_{T,J}^{\delta}\ l_1^{k+j}((-n+p+1)/2)_J((m+n)/2)_K$$
$$((m-1)/2)_\delta C_K(\Theta/2)C_\delta(I_{p-1})/(m/2)_K((m+p+1)/2)_\delta C_K(I_p)k!j!$$

waar/ ...

waar $b_{K,T}$ 'n konstante is. Die sentrale verdeling in hierdie geval is (Pillai (1967)(a))

$$f(l_1) = \Gamma(1/2)\Gamma_p((m+n)/2)\Gamma_{p-1}((p+1)/2)/(\Gamma_{p-1}((m+p+1)/2)\Gamma_p(n/2)$$

$$\Gamma(m/2)\Gamma(p/2))\ l_1^{mp/2\ -1}(1-l_1)^{(n-p-1)/2}\ {}_2F_1((-n+p+1)/2,$$

$$(m-1)/2\ ;\ (m+p+1)/2\ ;\ l_1 I_{p-1}).$$

Stelling 2.4.5

Indien $A \sim W(\Sigma_1, m)$ en $B \sim W(\Sigma_2, n)$ word die gesamentlike verdelingsfunksie van die wortels van L gegee deur

$$2.4.17\quad f(\Delta) = \pi^{p^2/2}\Gamma_p((m+n)/2)/(\Gamma_p(p/2)\Gamma_p(m/2)\Gamma_p(n/2))$$

$$|\Sigma_1^{-1}\Sigma_2|^{m/2}|\Delta|^{(m-p-1)/2}|I-\Delta|^{(n-p-1)/2}\alpha_p(\Delta)$$

$${}_1F_0((m+n)/2\ ;\ I-\Sigma_1^{-1}\Sigma_2, \Delta),\quad 0<\Delta<I.$$

Bewys.

Onder die ortogonale transformasie $H'LH = \Delta$ en deur gebruik te maak van 1.2.8 en 1.2.9, volg uit 2.2.22

$$f(\Delta) = \pi^{p^2/2}/(\Gamma_p(p/2)\Gamma_p(m/2)\Gamma_p(n/2)|2\Sigma_1|^{m/2}|2\Sigma_2|^{n/2})|\Delta|^{(m-p-1)/2}$$

$$|I-\Delta|^{(n-p-1)/2}\alpha_p(\Delta)\int_{T>0} \mathrm{esp}(-\Sigma_2^{-1}T/2)|T|^{(m+n-p-1)/2}$$

$${}_0F_0(-(\Sigma_1^{-1}-\Sigma_2^{-1})T/2, \Delta)dT.$$

Integrasie na T met behulp van 1.3.4 lewer die stelling.

Stelling 2.4.6

Indien $A \sim W(\Sigma_1, m)$ en $B \sim W(\Sigma_2, n)$ word die verdelingsfunksie van die grootste wortel van L gegee deur

2.4.18 $f(l_1)/$ ...

2.4.18 $$f(l_1) = \Gamma_p((m+n)/2)\Gamma_p((p+1)/2)/(\Gamma_p(n/2)\Gamma_p((m+p+1)/2))$$
$$|\Sigma_1{}^{-1}\Sigma_2|^{m/2}\Sigma_k\Sigma_K\Sigma_j\Sigma_J\Sigma_\delta\ g_{K,J}^{\delta}\ l_1{}^{mp/2\ +k+j-1}$$
$$(mp/2\ +k+j)((m+n)/2)_K(m/2)_\delta((-n+p+1)/2)_J C_\delta(I_p)$$
$$C_K(I-\Sigma_1{}^{-1}\Sigma_2)/((m+p+1)/2)_\delta C_K(I_p)k!j!.$$

<u>Bewys</u>.

Die bewys is dieselfde as die bewys vir stelling 2.4.4.

Uit 2.4.18 volg dus

2.4.19 $$P(l_1 \leq z) = \Gamma_p((m+n)/2)\Gamma_p((p+1)/2)/\Gamma_p(n/2)\Gamma_p((m+p+1)/2))$$
$$|\Sigma_1{}^{-1}\Sigma_2|^{m/2}\Sigma_k\Sigma_K\Sigma_j\Sigma_J\Sigma_\delta\ g_{K,J}^{\delta}\ z^{mp/2\ +k+j}((m+n)/2)_K$$
$$(m/2)_\delta((-n+p+1)/2)_J C_K(I-\Sigma_1{}^{-1}\Sigma_2)C_\delta(I_p)/(k!j!$$
$$((m+p+1)/2)_\delta C_K(I_p))$$

en

2.4.20 $$E(l_1)^h = \Gamma_p((m+n)/2)\Gamma_p((p+1)/2)/(\Gamma_p(n/2)\Gamma_p((m+p+1)/2))$$
$$|\Sigma_1{}^{-1}\Sigma_2|^{m/2}\Sigma_k\Sigma_K\Sigma_j\Sigma_J\Sigma_\delta\ g_{K,J}^{\delta}\ (mp/2\ +k+j)((m+n)/2)_K$$
$$(m/2)_\delta((-n+p+1)/2)_J C_K(I-\Sigma_1{}^{-1}\Sigma_2)C_\delta(I_p)/(k!j!$$
$$(mp/2\ +k+j+h)((m+p+1)/2)_\delta C_K(I_p))$$

Indien $\Sigma_1 = \Sigma_2$ in 2.4.18 word die verdeling

2.4.21 $$f(l_1) = \Gamma_p((m+n)/2)\Gamma_p((p+1)/2)/(\Gamma_p(n/2)\Gamma_p((m+p+1)/2))$$
$$\Sigma_j\Sigma_J l_1{}^{mp/2\ +j-1}(mp/2\ +j)(m/2)_J((-n+p+1)/2)_J$$
$$C_J(I_p)/((m+p+1)/2)_J j!\ ,$$

soos gevind deur Sugiyama (1967).

2.5 Die momente van spL en sp(I-L).

Die volgende integrale spruit voort uit paragraaf 2.4, naamlik uit 2.4.1

2.5.1 $$\int_0^I |\Delta|^{(m-p-1)/2}|I-\Delta|^{(n-p-1)/2}\ \alpha_p(\Delta)\ C_K(I-\Delta)\ d\Delta$$

$$= \Gamma_p(p/2)\Gamma_p(m/2)\Gamma_p(n/2,K)C_K(I_p)/(\pi^{p^2/2}\Gamma_p((m+n)/2,K))$$

en uit 2.4.13

2.5.2 $$\int_0^I |\Delta|^{(m-p-1)/2}|I-\Delta|^{(n-p-1)/2}\ \alpha_p(\Delta)\ C_K(\Delta)\ d\Delta$$

$$= \Gamma_p(p/2)\Gamma_p(n/2)\Gamma_p(m/2,K)/(\pi^{p^2/2}\Gamma_p((m+n)/2,K))C_K(I_p).$$

Hierdie integrale kan ook verkry word in Sugiyama (1966).

Met behulp van hierdie integrale is dit nou moontlik om die verwagte waardes van sekere sonale-polinome te vind en veral die momente voortbrengende funksies van spL en sp(I-L). Aangesien spL = spΔ en sp(I-L) = sp(I-Δ) sal die momente van spΔ en sp(I-Δ) gevind word.

Stelling 2.5.1

Indien $A \sim W(\Sigma,m)$ en $B \sim W(\Sigma,n,\Theta)$, Θ van rang $r \leq p$, dan word die momente voortbrengende funksie van sp(I-Δ) gedefinieer as

2.5.3 $$M_{sp(I-\Delta)}(t) = esp(-\theta_r/2)\Sigma_k\Sigma_K\Sigma_j\Sigma_J\Sigma_\delta\ g_{K,J}^{\delta}\ t^j((m+n)/2)_K$$

$$(n/2)_\delta C_K(\theta_r/2)C_\delta(I_p)/(((m+n)/2)_\delta(n/2)_K C_K(I_p)k!j!).$$

Bewys.

Volgens 2.4.3 kan die verwagte waarde van die sonale-polinoom $C_J(I-\Delta)$ geskrywe word as

$$E(C_J(I-\Delta)) = \pi^{p^2/2}\Gamma_p((m+n)/2)/(\Gamma_p(p/2)\Gamma_p(m/2)\Gamma_p(n/2))\ esp(-\theta_r/2)$$

$$\Sigma_k\Sigma_K((m+n)/2)_K C_K(\theta_r/2)/((n/2)_K C_K(I_p))\int_0^I |\Delta|^{(m-p-1)/2}$$

$$|I-\Delta|^{(n-p-1)/2}\alpha_p(\Delta)C_K(I-\Delta)C_J(I-\Delta)d\Delta.$$

Volgens 2.4.9

Volgens 2.4.9 is $C_K(I-\Delta)C_J(I-\Delta) = \Sigma_\delta g_{K,J}^{\delta} C_\delta(I-\Delta)$ en dus volgens 2.5.1 is

2.5.3 $$E(C_J(I-\Delta)) = \text{esp}(-\Theta_r/2)\Sigma_k\Sigma_K\Sigma_\delta g_{K,J}^{\delta}(n/2)_\delta((m+n)/2)_K$$
$$C_K(\Theta_r/2)C_\delta(I_p)/(((m+n)/2)_\delta(n/2)_K C_K(I_p)k!).$$

Die momente voortbrengende funksie van $sp(I-\Delta)$ word gegee deur $M(t) = E\ \text{espt}(I-\Delta) = \Sigma_j\Sigma_J\ t^j E(C_J(I-\Delta))/j!$ en dus die stelling.

Indien $\Theta_r = 0$ is dit duidelik uit 2.5.3 dat

2.5.4 $$E(C_J(I-\Delta)) = (n/2)_J C_J(I_p)/((m+n)/2)_J$$

en derhalwe is

2.5.5 $$M_{sp(I-\Delta)}(t) = \Sigma_j\Sigma_J t^j(n/2)_J C_J(I_p)/((((m+n)/2)_J j!)$$
$${}_1F_1(n/2\ ;\ (m+n)/2\ ;\ tI_p).$$

<u>Stelling 2.5.2</u>

Indien $A \sim W(\Sigma,m,\Theta)$, Θ van rang $r \leq p$, en $B \sim W(\Sigma,n)$ dan word die momente voortbrengende funksie van $sp\Delta$ gedefinieer as

2.5.6 $$M_{sp\Delta}(t) = \text{esp}(-\Theta_r/2)\Sigma_k\Sigma_K\Sigma_j\Sigma_J\Sigma_\delta g_{K,J}^{\delta} t^j((m+n)/2)_K(m/2)_\delta$$
$$C_K(\Theta_r/2)C_\delta(I_p)/((m/2)_K((m+n)/2)_\delta C_K(I_p)k!j!).$$

<u>Bewys</u>.

Volgens 2.4.13 is

$$E(C_J(\Delta)) = \pi^{p^2/2}\Gamma_p((m+n)/2)/(\Gamma_p(p/2)\Gamma_p(n/2)\Gamma_p(m/2))\ \text{esp}(-\Theta_r/2)$$
$$\Sigma_k\Sigma_K((m+n)/2)_K C_K(\Theta_r/2)/(m/2)_K k!)\ \int_0^I |\Delta|^{(m-p-1)/2}$$
$$|I-\Delta|^{(n-p-1)/2}\ \alpha_p(\Delta)C_K(\Delta)C_J(\Delta)d\Delta.$$

Maak weer gebruik van 2.4.9 en integreer volgens 2.5.2. Dus

2.5.7 $$E(C_J(\Delta)) = \text{esp}(-\Theta_r/2)\Sigma_k\Sigma_K\Sigma_\delta g_{K,J}^{\delta}((m+n)/2)_K(m/2)_\delta C_K(\Theta_r/2)$$
$$C_\delta(I_p)/(m/2)_K((m+n)/2)_\delta C_K(I_p)k!.\quad \text{Q.E.D.}$$

Indien/ ...

Indien $\theta_r = 0$ dan

$E(C_J(\Delta)) = (m/2)_J C_J(I_p)/((m+n)/2)_J$ (James (1964)), en

$M_{sp\Delta}(t) = {}_1F_1(m/2 \,;\, (m+n)/2 \,;\, tI_p)$ (James (1964)).

Die verdeling van spL is reeds bekend in hierdie geval (Khatri en Pillai (1968)) en is

$$f(spL) = \Gamma_p((m+n)/2)/(\Gamma_p(n/2)\Gamma(mp/2))\ esp(-\theta/2)\Sigma_k\Sigma_K\Sigma_j\Sigma_J\Sigma_\delta g_{K,J}^{\delta}$$
$$((m+n)/2)_K((-n+p+1)/2)_J(m/2)_\delta(spL)^{mp/2\ +k+j-1}C_K(\theta/2)$$
$$C_\delta(I_p)/(m/2)_K(mp/2)_{k+j}C_K(I_p)k!j!.$$

'n Soortgelyke verdeling kan afgelei word vir sp(I-L) in die vorige geval, maar kan ook uit bostaande verdeling herlei word.

<u>Stelling 2.5.3</u>

Indien $A \sim W(\Sigma_1, m)$ en $B \sim W(\Sigma_2, n)$ word die momente voortbrengende funksie van $sp\Delta$ gegee deur

$$2.5.8\quad M_{sp\Delta}(t) = |\Sigma_1^{-1}\Sigma_2|^{m/2}\Sigma_k\Sigma_K\Sigma_j\Sigma_J\Sigma_\delta g_{K,J}^{\delta}((m+n)/2)_K(m/2)_\delta t^j$$
$$C_K(I-\Sigma_1^{-1}\Sigma_2)C_\delta(I_p)/((m+n)/2)_\delta C_K(I_p)k!j!\ .$$

<u>Bewys.</u>

Soortgelyk as in die bewys van stelling 2.5.2 volg uit 2.4.17

$$E(C_J(\Delta)) = |\Sigma_1^{-1}\Sigma_2|^{m/2}\Sigma_k\Sigma_K\Sigma_\delta g_{K,J}^{\delta}((m+n)/2)_K(m/2)_\delta C_K(I-\Sigma_1^{-1}\Sigma_2)$$
$$C_\delta(I_p)/((m+n)/2)_\delta C_K(I_p)k!$$

en derhalwe die stelling.

Om die verdeling van spL in hierdie geval te vind, is maklik volgens die prosedure van Khatri en Pillai (1968). Die volgende integraal is deur hierdie skrywers bewys:

$$2.5.9\quad \int_D |Z|^{(m-p-1)/2}\alpha_p(Z)C_K(Z)dz_2{-}{-}dz_p$$
$$= \Gamma_p(m/2)\Gamma_p(p/2)(m/2)_K C_K(I_p)/\pi^{p^2/2}\Gamma(mp/2)(mp/2)_k$$

waar/ ...

waar $Z = \mathrm{diag}(z_1, z_2, \text{--}, z_p)$, $z_1 = 1 - z_2 - z_3 \text{--} z_p$, en

D: $\{0 < z_p < \text{--} < z_2 < z_1 = 1 - z_2 \text{--} z_p\}$.

Aangesien

$$|I-\Delta|^{(n-p-1)/2} C_K(\Delta) = \Sigma_j \Sigma_J \Sigma_\delta ((-n+p+1)/2)_J g_{K,J}^{\delta} C_\delta(\Delta)/j!$$

kan 2.4.17 geskrywe word as

$$2.5.10 \quad f(\Delta) = \pi^{p^2/2} \Gamma_p((m+n)/2)/(\Gamma_p(p/2)\Gamma_p(m/2)\Gamma_p(n/2))$$

$$|\Sigma_1^{-1}\Sigma_2|^{m/2} \Sigma_k \Sigma_K \Sigma_j \Sigma_J \Sigma_\delta g_{K,J}^{\delta} ((-n+p+1)/2)_J ((m+n)/2)_K$$

$$C_K(I-\Sigma_1^{-1}\Sigma_2)|\Delta|^{(m-p-1)/2} \alpha_p(\Delta) C_\delta(\Delta)/C_K(I_p) k! j!.$$

Integreer l_1, l_2, --, l_p oor die gebied spL wat neerkom op die integraal

$$2.5.11 \quad \int_{spL} |\Delta|^{(m-p-1)/2} \alpha_p(\Delta) C_\delta(\Delta) d\Delta.$$

Stel $z_i = l_i/spL$, $(i=1,\text{--},p)$, dan $z_1 = l_1/spL$

$$= (spL - l_2 - \ldots - l_p)/spL$$

$$= 1 - z_2 - \ldots - z_p.$$

$J(\Delta \to spL, z_2, \text{--}, z_p) = (spL)^{p-1}$

$|\Delta|^{(m-p-1)/2} = (spL)^{p(m-p-1)/2} |Z|^{(m-p-1)/2}$

$\alpha_p(\Delta) = (spL)^{p(p-1)/2} \alpha_p(Z)$

$C_\delta(\Delta) = (spL)^{k+j} C_\delta(Z)$.

Die integraal 2.5.11 word dus

$$(spL)^{mp/2+k+j-1} \int_D |Z|^{(m-p-1)/2} \alpha_p(Z) C_\delta(Z) dz_2 \text{--} dz_p.$$

Die volgende stelling is nou bewys.

Stelling 2.5.4

Indien $A \sim W(\Sigma_1, m)$ en $B \sim W(\Sigma_2, n)$ dan is die verdeling van spL

$$2.5.12 \quad \Gamma_p((m+n)/2)/(\Gamma_p(n/2)\Gamma(mp/2))|\Sigma_1^{-1}\Sigma_2|^{m/2} \Sigma_k \Sigma_K \Sigma_j \Sigma_J \Sigma_\delta g_{K,J}^{\delta}$$

$$(spL)^{mp/2+k+j-1} (m/2)_\delta ((-n+p+1)/2)_J ((m+n)/2)_K C_\delta(I_p)$$

$$C_K(I-\Sigma_1^{-1}\Sigma_2)/(mp/2)_{k+j} C_K(I_p) k! j!, \quad 0 < spL < 1.$$

2.6 Die/ ...

2.6 Die verdeling van L in terme van onafhanklike beta-verdelings van die eerste soort.

In hierdie paragraaf word die verdeling van L beskou in die geval waar $A \sim W(I,m)$ en $B \sim W(I,n,\theta)$ en θ van rang $r<p$ (θ diagonaal). Dit word naamlik aangetoon dat die verdeling 2.2.5 geskrywe kan word as die produk van onafhanklike beta-verdelings van die eerste soort vermenigvuldig met 'n nie-sentrale meerveranderlike beta-verdeling van die eerste soort van volle rang.

Volgens 2.2.5 kan die verdelingsfunksie van L geskrywe word as

2.6.1 $$\beta_1(L\ ;\ m/2, n/2, \theta_r/2) \propto (1/|2I_r|^{(m+n)/2})\ \mathrm{esp}(-\theta_r/2)$$
$$|L|^{(m-p-1)/2}|I-L|^{(n-p-1)/2}\int_{T_{11}>0}\mathrm{esp}(-T_{11}/2)$$
$$|T_{11}|^{(m+n-r-1)/2}\,{}_0F_1(n/2\ ;\tfrac{1}{4}\theta_r T_{11}^{1/2}(I-L_{11})T_{11}^{1/2})$$

Khatri en Pillai (1965) het aangetoon dat 'n sentrale meerveranderlike beta-verdeling van die eerste soort geskrywe kan word as die produk van onafhanklike beta-verdelings van die eerste soort. Die metode sal egter effens gewysig word vir die nie-sentrale geval.

Onder die opsplitsing $L = \begin{pmatrix} L_{11}(r\mathrm{x}r) & L_{12} \\ L_{21} & L_{22} \end{pmatrix}$ is

$$|L| = |L_{11}||L_{22}-L_{21}L_{11}^{-1}L_{12}|$$
$$= |L_{11}||L_{22.1}|$$

waar

2.6.2 $$L_{22.1} = L_{22}-L_{21}L_{11}^{-1}L_{12}.$$

$$J(L_{22}\rightarrow L_{22.1}) = 1.$$

$$|I-L| = |I-L_{11}||I-L_{22.1}-L_{21}(I-L_{11})^{-1}L_{11}^{-1}L_{12}|.$$

Stel U/ ...

Stel

2.6.3 $\quad U = ((I-L_{11})^{-1}L_{11}^{-1})^{1/2}L_{12}$

Die jakobiaan van die transformasie is

2.6.4 $\quad J(L_{12}\to U) = |I-L_{11}|^{(p-r)/2}|L_{11}|^{(p-r)/2}.$

Dit kan as volg aangetoon word:

Stel $U(rxp-r) = (U_1,U_2,--,U_{p-r})$ en

$$L_{12}(rxp-r) = (L_{(1)},L_{(2)},--,L_{(p-r)}).$$

Dus $U_j = RL_{(j)}$, $j=1,2,--,p-r$ en $R = ((I-L_{11})^{-1}L_{11}{}^{-1})^{1/2}.$

Dit is duidelik dat $J(L_{(j)}\to U_j) = |R|^{-1}$ en dus

$$\begin{aligned} J(L_{12}\to U) &= \prod_{j=1}^{p-r}J(L_{(j)}\to U_j) \\ &= |R|^{-(p-r)} \\ &= |I-L_{11}|^{(p-r)/2}|L_{11}|^{(p-r)/2}. \quad \text{Q.E.D.} \end{aligned}$$

Onder die transformasies 2.6.2 en 2.6.3 kan die verdeling van L geskrywe word as

2.6.5
$$\begin{aligned} f(L)\propto\ & (1/|2I_r|^{(m+n)/2})\ \text{esp}(-\theta_r/2)|L_{11}|^{(m-r-1)/2} \\ & |I-L_{11}|^{(n-r-1)/2}|L_{22.1}|^{(m-p-1)/2}|I-L_{22.1}-U'U|^{(n-p-1)/2} \\ & \int_{T_{11}>0}\text{esp}(-T_{11}/2)|T_{11}|^{(m+n-r-1)/2} \\ & {}_0F_1(n/2\ ;\ \theta_rT_{11}{}^{1/2}(I-L_{11})T_{11}{}^{1/2}/4)dT_{11}. \end{aligned}$$

Stel

2.6.6 $\quad W = U(I-L_{22.1})^{-1/2}, \quad J(U\to W) = |I-L_{22.1}|^{r/2}.$

Die bewys van die jakobiaan is soortgelyk as die van 2.6.4 deur U en W nou in kolomme in plaas van rye op te deel.

Die verdeling 2.6.5 word nou

2.6.7
$$\begin{aligned} f(L)\propto\ & [(1/|2I_r|^{(m+n)/2})\text{esp}(-\theta_r/2)|L_{11}|^{(m-r-1)/2} \\ & |I-L_{11}|^{(n-r-1)/2}\int_{T_{11}>0}\text{esp}(-T_{11}/2)|T_{11}|^{(m+n-r-1)/2} \\ & {}_0F_1(n/2\ ;\ \theta_rT_{11}{}^{1/2}(I-L_{11})T_{11}{}^{1/2}/4)dT_{11}]\ \text{x} \end{aligned}$$

$$|L_{22.1}|^{(m-p-1)/2}|I-L_{22.1}|^{(n-(p-r)-1)/2}|I-W'W|^{(n-p-1)/2}.$$

Dus

2.6.8 $f(L) = \beta_1(L\ ;\ m/2,n/2,\theta_r/2)$

$$= \beta_1(L_{11}(r\mathrm{x}r);\ m/2,n/2,\theta_r/2)\ \mathrm{x}$$

$$\beta_1(L_{22.1}(p-r\ \mathrm{x}\ p-r);\ (m-r)/2,n/2)\ \mathrm{x}\ f_3(W).$$

aangesien die voorskrif van die funksie tussen vierkante hakies in 2.6.7 die van die nie-sentrale meeveranderlike beta-verdeling van die eerste soort is van volle rang. (Sien 2.2.1)

2.6.9 $f_3(W) \propto |I-W'W|^{(n-p-1)/2}.$

Die volgende stelling is dus bewys.

<u>Stelling 2.6.1</u>

Indien $L \sim \beta_1(m/2,n/2,\theta_r/2)$, $r<p$, kan die verdelingsfunksie van L geskrywe word as

2.6.10 $f(L) = f_1(L_{11})\ f_2(L_{22.1})\ f_3(W)$

waar

2.6.11 $f_1(L_{11}) = \beta_1(L_{11}\ ;\ m/2,n/2,\theta_r/2)$

$$= (1/\Gamma_r(m/2)\Gamma_r(n/2)|2I_r|^{(m+n)/2})\mathrm{esp}(-\theta_r/2)$$

$$|L_{11}|^{(m-r-1)/2}|I-L_{11}|^{(n-r-1)/2}\int_{T_{11}>0}$$

$$\mathrm{esp}(-T_{11}/2)|T_{11}|^{(m+n-r-1)/2}{}_0F_1(n/2\ ;$$

$$\theta_r T_{11}^{1/2}(I-L_{11})T_{11}^{1/2}/4)dT_{11},\quad 0<L_{11}<I,$$

2.6.12 $f_2(L_{22.1}) = \beta_1(L_{22.1}\ ;\ (m-r)/2,n/2)$

$$= \Gamma_{p-r}((m+n-r)/2)/(\Gamma_{p-r}((m-r)/2)\Gamma_{p-r}(n/2))$$

$$|L_{22.1}|^{(m-p-1)/2}|I-L_{22.1}|^{(n-(p-r)-1)/2},$$

$$0<L_{22.1}<I$$

Die verdeling van W word gegee in 2.6.9 en sal nou verder

ondersoek/ ...

ondersoek word.

Die verdeling van W.

Stel $W'(p-r\times r) = (W_1', W_2', --, W_r')$.

$$
\begin{aligned}
\text{Dus } |I-W'W| &= |I-\Sigma_{k=1}^{r} W_k'W_k| \\
&= \begin{vmatrix} I-\Sigma_{k=1}^{r-1} W_k'W_k & W_r' \\ W_r & 1 \end{vmatrix} \\
&= |I-\Sigma_{k=1}^{r-1} W_k'W_k|(1-W_r(I-\Sigma_{k=1}^{r-1} W_k'W_k)^{-1}W_r').
\end{aligned}
$$

Stel $E_r = W_r(I-\Sigma_{k=1}^{r-1} W_k'W_k)^{-1/2}$ met

2.6.13 $J(W_r \rightarrow E_r) = |I-\Sigma_{k=1}^{r-1} W_k'W|^{1/2}$.

Dus $|I-W'W| = |I-\Sigma_{k=1}^{r-1} W_k'W_k|(1-E_rE_r')$. Herhaal die prosedure op $|I-\Sigma_{k=1}^{r-1} W_k'W_k|$ en deur hiermee voort te gaan, volg dat

2.6.14 $|I-W'W| = \prod_{i=1}^{r}(1-E_iE_i')$.

Laat $E'(r\times p-r) = (E_1', E_2', --, E_r')$, $E_1 = W_1$, dan

2.6.15
$$
\begin{aligned}
J(W \rightarrow E) &= |I-W_1'W|^{1/2}|I-\Sigma_{k=1}^{2} W_k'W_k|^{1/2}..|I-\Sigma_{k=1}^{r-1} W_k'W_k|^{1/2} \\
&= \prod_{i=1}^{r-1}(1-E_iE_i')^{(r-i)/2}.
\end{aligned}
$$

Stel

2.6.16
$$
E_i'(p-r\times 1) = X_i' = \begin{pmatrix} x_{i1}^{1/2} \\ (1-x_{i1})^{1/2}x_{i2}^{1/2} \\ \text{-----------} \\ (1-x_{i1})^{1/2}..(1-x_{i,p-r-1})^{1/2}x_{i,p-r}^{1/2} \end{pmatrix}.
$$

Die jakobiaan van die transformasie is

$$
J(E_i \rightarrow X_i) = \begin{vmatrix} \frac{1}{2}x_{i1}^{-1/2} & 0 & --- & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}(1-x_{i1})^{1/2}x_{i2}^{-1/2} & --- & 0 \\ \text{---} & \text{---} & \text{---} & \text{---} \\ 0 & 0 & --- & \frac{1}{2}(1-x_{i1})^{1/2}\ldots(1-x_{i,p-r-1})^{1/2}x_{i,p-r}^{-1/2} \end{vmatrix}
$$

Dit is/ ...

Dit is

$$J(E_i \to X_i) = (1/2)^{p-r}\prod_{j=1}^{p-r}[(1-x_{ij})^{(p-r-j)/2}x_{ij}^{-1/2}].$$

Stel $X' = (X_1', --, X_r')$, dan

2.6.17 $$J(E \to X) = (1/2)^{r(p-r)}\prod_{i=1}^{r}\prod_{j=1}^{p-r}(1-x_{ij})^{(p-r-j)/2}x_{ij}^{-1/2}$$

Onder die transformasie 2.6.16 volg dat

$$1-E_iE_i' = \prod_{j=1}^{p-r}(1-x_{ij})$$

en derhalwe is 2.6.14

2.6.18 $$|I-W'W| = \prod_{i=1}^{r}\prod_{j=1}^{p-r}(1-x_{ij}).$$

Die jakobiaan van W na X volg saam met 2.6.15 en 2.6.17 as

2.6.19 $$\begin{aligned} J(W \to X) &= J(W \to E)\, J(E \to X) \\ &= \prod_{i=1}^{r-1}\prod_{j=1}^{p-r}(1-x_{ij})^{(r-i)/2}.(1/2)^{r(p-r)}. \\ &\quad \prod_{i=1}^{r}\prod_{j=1}^{p-r}(1-x_{ij})^{(p-r-j)/2}x_{ij}^{-1/2} \\ &= (1/2)^{r(p-r)}\prod_{i=1}^{r}\prod_{j=1}^{p-r}(1-x_{ij})^{(p-j-i)/2}x_{ij}^{-1/2}. \end{aligned}$$

Aan die hand van 2.6.18 en 2.6.19 kan die verdelingsfunksie van W dus geskrywe word as

$$\begin{aligned} f_3(W) &\propto |I-W'W|^{(n-p-1)/2} \\ &\quad \prod_{i=1}^{r}\prod_{j=1}^{p-r}x_{ij}^{-1/2}(1-x_{ij})^{(n-j-i-1)/2}. \end{aligned}$$

Dit is

2.6.20 $$f_3(W) = \prod_{i=1}^{r}\prod_{j=1}^{p-r} \beta_1(x_{ij}\ ;\ 1/2,(n-j-i+1)/2),\ 0<x_{ij}<1.$$

Dit kan ook aangetoon word dat die verdeling van $L_{22.1}$ geskrywe kan word as die produk van onafhanklike beta-verdelings van die eerste soort.

<u>Die verdeling van $L_{22.1}$.</u>

$$f_2(L_{22.1}) \propto |L_{22.1}|^{(mp-1)/2}|I-L_{22.1}|^{(n-(p-r)-1)/2}.$$

Aangesien stelling 2.6.1 ook geld vir die sentrale geval, d.i. $\theta_r = 0$, gaan die verdeling van L in die sentrale geval

geskrywe word/ ...

geskrywe word as die produk van onafhanklike beta-verdelings van die eerste soort waaruit die verdeling van $L_{22.1}$ dan maklik beskou kan word.

Indien $\theta_r = 0$, volg uit 2.6.10 en 2.6.20 dat

$$2.6.21 \quad f(L) = \beta_1(L(pxp);\ m/2,n/2)$$
$$= \beta_1(L_{11}(rxr);\ m/2,n/2)\ \beta_1(L_{22.1}(p-rxp-r);(m-r)/2,n/2)$$
$$\prod_{i=1}^{r}\prod_{j=1}^{p-r}\beta_1(x_{ij}\ ;\ 1/2,(n-j-i+1)/2)$$

Stel $r = 1$. Dus

$$\beta_1(L(pxp);\ m/2,n/2) = \beta_1(l_{11}(1x1);\ m/2,n/2)\beta_1(L_{22.1}(p-1xp-1);$$
$$(m-1)/2,n/2)\prod_{j=1}^{p-1}\beta_1(x_{1j}\ ;\ 1/2,(n-j)/2).$$

Derhalwe is

$$\beta_1(L_{22.1}(p-1xp-1);\ (m-1)/2,n/2) = \beta_1(l_{22.1}(1x1);\ (m-1)/2,n/2)$$
$$\beta_1(L_{33.1}(p-2xp-2);\ (m-2)/2,n/2)\prod_{j=1}^{p-2}\beta_1(x_{2j}\ ;\ 1/2,$$
$$(n-j)/2).$$

$$\beta_1(L_{33.1}(p-3xp-3);\ (m-2)/2,n/2) = \beta_1(l_{33.1}(1x1);\ (m-2)/2,n/2)$$
$$\beta_1(L_{44.1}(p-3xp-3);\ (m-3)/2,n/2)\prod_{j=1}^{p-3}\beta_1(x_{3j}\ ;\ 1/2,$$
$$(n-j)/2).$$

$$\beta_1(L_{p-1,p-1.1}(2x2);\ (m-p+2)/2,n/2) = \beta_1(l_{p-1,p-1.1}(1x1);$$
$$(m-p+2)/2,n/2)\beta_1(l_{pp}(1x1);\ (m-p+1)/2,n/2)$$
$$\beta_1(x_{p-1,1}\ ;\ 1/2,(n-1)/2).$$

Geen spesifieke betekenis word aan die veranderlikes $L_{ii.1}$ geheg nie, behalwe as om net 'n veranderlike aan te dui nie.

Die verdelingsfunksie van L (sentraal) kan dus geskrywe word as

2.6.22 $\beta_1(L;/$ ...

2.6.22 $\beta_1(L ; m/,n/2) = \prod_{i=1}^{p}\beta_1(l_{ii.1}(1x1); (m-i+1)/2,n/2)$

$\prod_{i=1}^{p-1}\prod_{j=1}^{p-i}\beta_1(x_{ij} ; 1/2, (n-j)/2), \quad l_{11.1} = l_{11}.$

Maar $f_2(L_{22.1}) = \beta_1(L_{22.1}(p-rxp-r); (m-r)/2,n/2)$, (sien 2.6.12).

Vervang dus in 2.6.22 p deur p-r en m deur m-r, dan is

2.6.23 $f_2(L_{22.1}) = \prod_{i=1}^{p-r}\beta_1(u_i ; (m-r-i+1)/2,n/2)$

$\prod_{i=1}^{p-r-1}\prod_{j=1}^{p-r-i}\beta_1(v_{ij} ; 1/2, (n-j)/2).$

Gebruik is gemaak van die skalar veranderlikes u_i en v_{ij} slegs om aan te dui dat nie dieselfde veranderlikes is as in die geval 2.6.22 nie.

Saam met 2.6.20 kan die gesamentlike verdelingsfunksie van $L_{22.1}$ en W dus geskrywe word as

2.6.24 $f_2(L_{22.1})f_3(W) = [\prod_{i=1}^{p-r}\beta_1(u_i ; (m-r-i+1)/2,n/2)]$

$[\prod_{i=1}^{p-r-1}\prod_{j=1}^{p-r-i}\beta_1(v_{ij} ; 1/2,(n-j)/2)]$

$[\prod_{i=1}^{r}\prod_{j=1}^{p-r}\beta_1(x_{ij} ; 1/2, (n-j-i+1)/2)].$

Beskou die produk van die laaste twee terme in vierkante hakies. Dit kan aangetoon word dat

2.6.25 $[\prod_{i=1}^{p-r-1}\prod_{j=1}^{p-r-i}\beta_1(v_{ij} ; 1/2,(n-j)/2)]$

$[\prod_{i=1}^{r}\prod_{j=1}^{p-r}\beta_1(x_{ij} ; 1/2,(n-j-i+1)/2)]$

$= \prod_{i=r+1}^{p}\prod_{j=1}^{i-1}\beta_1(w_{ij} ; 1/2,(n-i+j)/2)$

waar w_{ij} slegs 'n ander veranderlike aandui.

Substitueer 2.6.25 in 2.6.24 dan volg

2.6.26 $f_2(L_{22.1})f_3(W) = \prod_{i=r+1}^{p}\beta_1(u_i ; (m-i+1)/2,n/2)$

$\prod_{j=1}^{i-1}\beta_1(w_{ij} ; 1/2,(n-i+j)/2).$

Substitueer/ ...

Substitueer hierdie resultaat in 2.6.10 en die volgende stelling is bewys.

Stelling 2.6.2

Indien $L \sim \beta_1(m/2,n/2,\theta_r/2)$, $r<p$, dan kan die verdelingsfunksie van L geskrywe word as

2.6.27 $$\beta_1(L\ ;\ m/2,n/2,\theta_r/2) = \beta_1(L_{11}\ ;\ m/2,n/2,\theta_r/2) \prod_{i=r+1}^{p}\beta_1(u_i\ ;\ (m-i+1)/2,n/2)\prod_{j=1}^{i-1}\beta_1(w_{ij}\ ;\ 1/2,(n-i+j)/2),\quad 0<L_{11}<I,\ 0<u_i,w_{ij}<1.$$

Stelling 2.6.3

Indien $L \sim \beta_1(m/2,n/2,\theta_r/2)$, $r<p$, dan kan die verdelingsfunksie van $|L|$ geskrywe word as

2.6.28 $$f(|L|) = f_1(|L_{11}|)\prod_{i=r+1}^{p} f_i(u_i)$$

waar $L_{11} \sim \beta_1(m/2,n/2,\theta_r/2)$ en $u_i \sim \beta_1((m-i+1)/2,n/2)$.

Bewys.

Volgens 2.2.13 is

$$E|L|^h = \Gamma_p(m/2+h)\Gamma_p((m+n)/2)/(\Gamma_p(m/2)\Gamma_p((m+n)/2+h))\mathrm{esp}(-\theta_r/2)\ {}_1F_1((m+n)/2\ ;\ (m+n)/2+h\ ;\ \theta_r/2)$$

$$= [\Gamma_r(m/2+h)\Gamma_r((m+n)/2)/(\Gamma_r(m/2)\Gamma_r((m+n)/2+h))\ \mathrm{esp}(-\theta_r/2)\,{}_1F_1((m+n)/2\ ;\ (m+n)/2+h\ ;\ \theta_r/2)]$$

$$\prod_{i=r+1}^{p}(\Gamma((m+n+1-i)/2)\Gamma((m+1-i)/2+h)/\Gamma((m+1-i)/2)\ \Gamma((m+n+1-i)/2+h))$$

$$= E|L_{11}|^h\prod_{i=r+1}^{p}E(u_i)^h.$$

Aangesien L_{11} en u_i begrens is, volg die stelling.

Die volgende interessantheid volg uit 2.6.27 en 2.6.28, naamlik dat

2.6.29
$$\begin{cases} f(L) = f_1(L_{11}) \prod_{i=r+1}^{p} f_i(u_i) \prod_{j=1}^{i=1} f_{ij}(w_{ij}) \\ f(|L|) = f_1(|L_{11}|) \prod_{i=r+1}^{p} f_i(u_i) \end{cases}$$

waar $L_{11} \sim \beta_1(m/2,n/2,\theta_r/2)$, $u_i \sim \beta_1((m-i+1)/2,n/2)$ en $w_{ij} \sim \beta_1(1/2,(n-i+j)/2)$.

Stelling 2.6.4

Indien $L \sim \beta_1(m/2,n/2,\theta_r/2)$, $r<p$, dan kan die verdelingsfunksie van $|I-L|$ geskrywe word

2.6.30 $$f(|I-L|) = f_1(|I-L_{11}|) \prod_{i=r+1}^{p} f_i(1-u_i)$$

waar $I-L_{11} \sim \beta_1(n/2,m/2,\theta_r/2)$ en $1-u_i \sim \beta_1((n-i+1)/2,m/2)$.

Bewys.

Volgens 2.2.14 is

$$E|I-L|^h = \Gamma_p(n/2+h)\Gamma_p((m+n)/2)/(\Gamma_p(n/2)\Gamma_p((m+n)/2+h))$$
$$\exp(-\theta_r/2)\,{}_2F_2((m+n)/2,n/2+h\,;\,n/2,(m+n)/2+h\,;\theta_r/2)$$
$$= \Gamma_r(n/2+h)\Gamma_r((m+n)/2)/(\Gamma_r(n/2)\Gamma_r((m+n)/2+h))$$
$$\exp(-\theta_r/2)\,{}_2F_2((m+n)/2,n/2+h\,;\,n/2,(m+n)/2+h;\theta_r/2)$$
$$\prod_{i=r+1}^{p}(\Gamma((m+n+1-i)/2)\Gamma((n+1-i)/2+h)/\Gamma((n+1-i)/2)$$
$$\Gamma((m+n+1-i)/2+h))$$
$$= E|I-L_{11}|^h \prod_{i=r+1}^{p} E(1-u_i)^h.$$

HOOFSTUK III.

DIE NIE-SENTRALE MEERVERANDERLIKE BETA-VERDELING VAN DIE TWEEDE SOORT.

3.1 Inleiding.

In hierdie hoofstuk word die verdeling van $V = B^{-1/2}AB^{-1/2}$ ondersoek indien $A \sim W(\Sigma, m)$ en $B \sim W(\Sigma, n, \Theta)$, Θ van rang $r \leq p$. Die verdeling van V word in 3.2 gedefinieer asook die verdeling van V^{-1}. In 3.3 word die gesamentlike verdeling van die karakteristieke wortels van V en V^{-1} afgelei en in 3.4 die verdelings van spV en spV^{-1}. In 3.5 word aangetoon dat die verdelings van V en $|V|$ indien Θ van rang $r<p$ is, geskrywe kan word as die produk van onafhanklike beta-verdelings van die tweede soort.

3.2 Die verdeling van V.

Stelling 3.2.1

Indien $A \sim W(\Sigma, m)$ en $B \sim W(\Sigma, n, \Theta)$, Θ van rang p, word die verdelingsfunksie van V gegee deur

$$3.2.1 \quad f(V) = (1/\Gamma_p(m/2)\Gamma_p(n/2)|2\Sigma|^{(m+n)/2})\ \mathrm{esp}(-\Theta/2)$$

$$|V|^{(m-p-1)/2} \int_{B>0} \mathrm{esp}(-(\Sigma^{-1}B + B^{1/2}\Sigma^{-1}B^{1/2}V)/2)$$

$$|B|^{(m+n-p-1)/2}\ {}_0F_1(n/2\ ;\ \Theta\Sigma^{-1}B/4)dB, \quad V>0.$$

Bewys.

Die jakobiaan van die transformasie $V = B^{-1/2}AB^{-1/2}$ is $J(A \to V) = |B|^{(p+1)/2}$, in die gesamentlike verdeling van A en B. Die integraal is egter onbekend en 'n oplossing kon tot dusver nog nie gevind word nie.

Hierdie verdeling word geklassifiseer as 'n beta van die tweede soort, maar daar sal na die volgende verdeling verwys word as melding gemaak word van die nie-sentrale meerveranderlike beta-verdeling van die tweede soort van volle rang.

Afleiding/ ...

Afleiding 3.2.1

Indien $A \sim W(I,m)$ en $B \sim W(I,n,\Theta)$, Θ van rang p, word die verdelingsfunksie van V gegee deur

3.2.2 $\beta_2(V\ ;\ m/2,n/2,\Theta/2) = \Gamma_p((m+n)/2)/(\Gamma_p(m/2)\Gamma_p(n/2))$

$$\mathrm{esp}(-\Theta/2)|V|^{(m-p-1)/2}|I+V|^{-(m+n)/2}{}_1F_1((m+n)/2\ ;$$

$$n/2\ ;\ \Theta(I+V)^{-1}/2),\quad V>0.$$

Bewys.

Stel $\Sigma = I$ in 3.2.1, d.i.

$$f(V) = (1/\Gamma_p(m/2)\Gamma_p(n/2)|2I_p|^{(m+n)/2})\ \mathrm{esp}(-\Theta/2)|V|^{(m-p-1)/2}$$

$$\int_{B>0}\mathrm{esp}(-B(I+V)/2)|B|^{(m+n-p-1)/2}{}_0F_1(n/2\ ;\ \Theta B/4)dB.$$

Integreer na B volgens 1.3.4 en die afleiding volg.

Aangesien 3.2.2 'n verdelingsfunksie is, volg dat $\int_{V>0}f(V)dV = 1$ en derhalwe is

3.2.3 $\int_{V>0}|V|^{a-(p+1)/2}|I+V|^{-(a+b)}C_K(\Theta(I+V)^{-1}/2)dV$

$$= \Gamma_p(a)\Gamma_p(b,K)C_K(\Theta/2)/\Gamma_p(a+b,K).$$

Deur gebruik te maak van hierdie integraal volg uit 3.2.2

3.2.4 $E|V|^h = \Gamma_p((m+n)/2)/(\Gamma_p(m/2)\Gamma_p(n/2))\ \mathrm{esp}(-\Theta/2)$

$$\int_{V>0}|V|^{(m+2h-p-1)/2}|I+V|^{-(m+n)/2}{}_1F_1((m+n)/2\ ;$$

$$n/2\ ;\ \Theta(I+V)^{-1}/2)dV$$

$$= \Gamma_p(m/2+h)\Gamma_p(n/2-h)/(\Gamma_p(m/2)\Gamma_p(n/2))\mathrm{esp}(-\Theta/2)$$

$${}_1F_1(n/2-h\ ;\ n/2\ ;\ \Theta/2)$$

en

3.2.5 $E|I+V|^{-h} = \Gamma_p((m+n)/2)/(\Gamma_p(m/2)\Gamma_p(n/2))\ \mathrm{esp}(-\Theta/2)$

$$\int_{V>0}|V|^{(m-p-1)/2}|I+V|^{-(m+n+2h)/2}$$

$${}_1F_1((m+n)/2\ ;\ n/2\ ;\ \Theta(I+V)^{-1}/2)dV$$

= / ...

$$= \Gamma_p(n/2 + h)\Gamma_p((m+n)/2)/(\Gamma_p(n/2)\Gamma_p((m+n)/2 + h))$$

$$esp(-\theta/2)\,{}_2F_2(n/2 + h, (m+n)/2 \,;\, (m+n)/2 + h, n/2 \,;\theta/2)$$

Afleiding 3.2.2

Indien $A \sim W(I,m)$ en $B \sim W(I,n,\theta)$, θ diagonaal en van rang $r<p$, word die verdelingsfunksie van V gegee deur

3.2.6 $$\beta_1(V \,;\, m/2, n/2, \theta_r/2) = \Gamma_p((m+n)/2)/(\Gamma_p(m/2)\Gamma_p(n/2))$$

$$esp(-\theta_r/2)|V|^{(m-p-1)/2}|I+V|^{-(m+n)/2}\,{}_1F_1((m+n)/2 \,;$$

$$n/2 \,;\, \theta_r(I+V_{1.2})^{-1}/2), \quad V>0,$$

waar $V_{1.2} = V_{11} - V_{12}(I+V_{22})^{-1}V_{21}$.

Bewys.

'n Ortogonale matriks C bestaan sodanig dat

$$C\theta C' = \begin{pmatrix} \theta_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

maar aangesien die nie-sentrale verdeling van V nie invariant is ten opsigte van die transformasie $V \to CVC'$ nie, word die verdelings van A en B in hulle kanoniese vorme beskou (sien afleiding 2.2.1). Deur dus θ as diagonaal in 3.2.2 te beskou, kan die sonale-polinoom in die hipergeometriese funksie geskrywe word as

$$C_K(\theta(I+V)^{-1}/2) = C_K(\theta_r(I+V_{1.2})^{-1}/2), \; K_{i>r}=0 \text{ en } \theta \text{ van}$$

rang $r<p$. V is opgedeel in submatrikse sodanig dat

$$V = \begin{pmatrix} V_{11} & V_{12} \\ V_{21} & V_{22} \end{pmatrix}$$

en V_{11} van orde r is.

Indien $r=1$ word die nie-sentrale meerveranderlike betaverdeling van die tweede soort verkry in die lineêre geval soos gedefinieer deur Troskie (1966), d.i.

$\beta_2(V \,;/ \ldots$

$$\beta_2(V\,;\,m/2,n/2,\theta_1/2) = \Gamma_p((m+n)/2)/(\Gamma_p(m/2)\Gamma_p(n/2))e^{-\theta_1/2}$$

$$|V|^{(m-p-1)/2}|I+V|^{-(m+n)/2}{}_1F_1((m+n)/2\,;\,n/2\,;\theta_1/2(1+v_{1.2}))$$

Indien $\theta_r = 0$ volg die sentrale meerveranderlike beta-verdeling van die tweede soort soos gedefinieer deur Olkin en Rubin (1964), d.i.

$$\beta_2(V\,;\,m/2,n/2) = \Gamma_p((m+n)/2)/(\Gamma_p(m/2)\Gamma_p(n/2))|V|^{(m-p-1)/2}$$

$$|I+V|^{-(m+n)/2}.$$

Aangesien 3.2.6 'n verdelingsfunksie is, volg die integraal

3.2.7 $$\int_{V>0}|V|^{a-(p+1)/2}|I+V|^{-(a+b)}C_K(\theta_r(I+V_{1.2})^{-1}/2)dV$$

$$= \Gamma_p(a)\Gamma_p(b,K)C_K(\theta_r/2)/\Gamma_p(a+b,K).$$

Met behulp van hierdie integraal kan die h-de momente van $|V|$ en $|I+V|^{-1}$ uit 3.2.6 gevind word, d.i.

3.2.8 $$E|V|^h = \Gamma_p(m/2+h)\Gamma_p(n/2-h)/(\Gamma_p(m/2)\Gamma_p(n/2))\text{esp}(-\theta_r/2)$$

$${}_1F_1(n/2-h\,;\,n/2\,;\,\theta_r/2)$$

en

3.2.9 $$E|I+V|^{-h} = \Gamma_p(n/2+h)\Gamma_p((m+n)/2)/(\Gamma_p(n/2)\Gamma_p((m+n)/2+h))$$

$$\text{esp}(-\theta_r/2){}_2F_2(n/2+h,(m+n)/2\,;\,(m+n)/2+h,$$

$$n/2\,;\,\theta_r/2)$$

Hierdie momente kan ook uit 3.2.4 en 3.2.5 respektiewelik bewys word met behulp van 1.2.10. Die rede waarom die momente dieselfde is, is dat die determinante $|V|$ en $|I+V|$ invariant is ten opsigte van ortogonale transformasies soos $V \to CVC'$.

Deur gebruik te maak van 3.2.7 kan uit 3.2.6 ook aangetoon word dat

3.2.10 $$E|V(I+V)^{-1}|^h = \Gamma_p(m/2+h)\Gamma_p((m+n)/2)/(\Gamma_p(m/2)\Gamma_p((m+n)/2$$

$$+h))\text{esp}(-\theta_r/2){}_1F_1((m+n)/2\,;\,(m+n)/2+h\,;\,\theta_r/2).$$

Die resultate/ ...

Die resultate 3.2.9 en 3.2.10 is identies dieselfde as die van 2.2.14 en 2.2.13 respektiewelik. Dit volg uit die volgende verwantskap tussen V en L:

$$V = (I-L)^{-1/2}L(I-L)^{-1/2},$$

d.i. $I+V = (I-L)^{-1}$. Die asimptotiese verdelings van $|I+V|^{-1}$ en $|V(I+V)^{-1}|$ sal gevolglik dieselfde wees as die van $|I-L|$ en $|L|$ respektiewelik soos gevind in paragraaf 2.3. Tot dusver kon nog nie daarin geslaag word om 'n asimptotiese verdeling vir $|V|$ af te lei nie.

<u>Afleiding 3.2.3</u>

Indien $A \sim W(I,m)$ en $B \sim W(I,n,\Theta)$, Θ diagonaal en van rang $r \leq p$, word die verdelingsfunksie van $Z = V^{-1}$ gegee deur

3.2.11 $$f(Z) = \Gamma_p((m+n)/2)/(\Gamma_p(m/2)\Gamma_p(n/2))\exp(-\theta_r/2)|Z|^{(n-p-1)/2}$$
$$|I+Z|^{-(m+n)/2}{}_1F_1((m+n)/2\ ;\ n/2\ ;\theta_r(I+Z_{1.2})^{-1}Z_{1.2}/2)$$
$$Z>0.$$

<u>Bewys.</u>

Stel $V=Z^{-1}$, $J(V\to Z) = |Z|^{-(p+1)}$, in 3.2.6. Onder die transformasie volg dat $(I+V)^{-1} = (I+Z)^{-1}Z$ met die gevolg dat

3.2.12 $$(I+V_{1.2})^{-1} = (I+Z_{1.2})^{-1}Z_{1.2}$$

waar $Z_{1.2} = Z_{11}-Z_{12}(I+Z_{22})^{-1}Z_{21}$. 3.2.12 kan soos volg aangetoon word: Laat $Z = \begin{pmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{pmatrix}$ sodanig dat Z_{11} van orde r is. Stel $(I+Z)^{-1}Z = \begin{pmatrix} (I+Z_{1.2})^{-1} & C_1 \\ C_2 & C_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{pmatrix}$.

Die matriks-element in die eerste r rye en kolomme van $(I+Z)^{-1}Z$ is dus $(I+Z_{1.2})^{-1}Z_{11} + C_1Z_{21}$. Volgens Graybill ((1961), bladsy 8) is $C_1 = -(I+Z_{1.2})^{-1}Z_{12}(I+Z_{22})^{-1}$. Substitueer hierdie waarde vir C_1 in bostaande uitdrukking en 3.2.12 word verkry. Dit bewys ook die afleiding.

Uit 3.2.11/ ...

Uit 3.2.11 volg nou dat

3.2.13 $$\int_{Z>0}|Z|^{a-(p+1)/2}|I+Z|^{-(a+b)}C_K(\Theta_r(I+Z_{1.2})^{-1}Z_{1.2}/2)dZ$$

$$= \Gamma_p(a)\Gamma_p(b)/(\Gamma_p(a+b))((a)_K/(a+b)_K)C_K(\Theta_r/2).$$

Dus

3.2.14 $$E|Z|^h = \Gamma_p(n/2+h)\Gamma_p(m/2-h)/(\Gamma_p(n/2)\Gamma_p(m/2))\mathrm{esp}(-\Theta_r/2)$$

$$_1F_1(n/2+h\ ;\ n/2\ ;\ \Theta_r/2)$$

en

3.2.15 $$E|I+Z|^{-h} = \Gamma_p(n/2+h)\Gamma_p((m+n)/2)/(\Gamma_p(n/2)\Gamma_p((m+n)/2+h))$$

$$\mathrm{esp}(-\Theta_r/2)\,_2F_2(n/2+h,(m+n)/2\ ;\ (m+n)/2+h,n/2;\Theta_r/2)$$

Die asimptotiese verdeling van $|I+Z|^{-1}$ kan gevind word deur m en n om te ruil in die asimptotiese verdeling van $|I+V|^{-1}$.

3.3 Die verdeling van die karakteristieke wortels van V.

Stelling 3.3.1

Indien $A \sim W(\Sigma,m)$ en $B \sim W(\Sigma,n,\Theta)$, Θ van rang p, word die gesamentlike verdelingsfunksie van die karakteristieke wortels $v_1, v_2, --, v_p$ van V ($v_1>v_2>-->v_p>0$) gegee deur

3.3.1 $$f(V_s) = \pi^{p^2/2}\Gamma_p((m+n)/2)/(\Gamma_p(p/2)\Gamma_p(m/2)\Gamma_p(n/2))$$

$$\mathrm{esp}(-\Theta/2)|V_s|^{(m-p-1)/2}|I+V_s|^{-(m+n)/2}\alpha_p(V_s)$$

$$_1F_1((m+n)/2\ ;\ n/2\ ;\ \Theta/2,(I+V_s)^{-1}),\ V_s>0,$$

waar $V_s = \mathrm{diag}(v_1,v_2,--,v_p)$.

Bewys.

Aangesien die karakteristieke wortels van V invariant is ten opsigte van die transformasies $A \to \Sigma^{1/2}A\Sigma^{1/2}$ en $B \to \Sigma^{1/2}B\Sigma^{1/2}$ kan die stelling bewys word deur gebruik te maak van die verdeling van V soos gedefinieer in 3.2.2 in plaas van die verdeling 3.2.1. 'n Ortogonale matriks H bestaan sodanig dat $H'VH = V_s = \mathrm{diag}(v_1,--v_p)$.

dV = / ...

3.3.5 f(Z_s) = / ...

$$dV = \alpha_p(V_s)dV_s d(H), \quad \alpha_p(V_s) = \prod_{i<j}(v_i - v_j).$$

Substitueer dus $V = HV_sH'$ in 3.2.2 en integreer na H deur gebruik te maak van 1.2.8 en 1.2.9. Die stelling volg sondermeer. Hierdie verdeling is reeds deur James (1964) gedefinieer.

Afleiding 3.3.1

Indien $A \sim W(\Sigma,m)$ en $B \sim W(\Sigma,n,\Theta)$, Θ van rang $r \leq p$, word die gesamentlike verdelingsfunksie van die karakteristieke wortels van V gegee deur

$$3.3.2 \quad f(V_s) = \pi^{p^2/2}\Gamma_p((m+n)/2)/(\Gamma_p(p/2)\Gamma_p(m/2)\Gamma_p(n/2))$$

$$\text{esp}(-\Theta_r/2)|V_s|^{(m-p-1)/2}|I+V_s|^{-(m+n)/2}\alpha_p(V_s)$$

$$\Sigma_k\Sigma_K((m+n)/2)_K C_K(\Theta_r/2)C_K((I+V_s)^{-1})/(n/2)_K C_K(I_p)k!$$

waar K 'n opsplitsing van k in nie meer as r komponente is nie.

Bewys.

'n Ortogonale matriks C bestaan sodanig dat $C\Theta C' = \begin{pmatrix} \Theta_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

en deur gebruik te maak van 1.2.10 volg die afleiding.

Indien r=1, laat $\Theta_1 = \lambda$. Die verdelingsfunksie 3.3.2 kan nou geskrywe word as

$$3.3.4 \quad f(V_s) = \pi^{p^2/2}\Gamma_p((m+n)/2)/(\Gamma_p(p/2)\Gamma_p(m/2)\Gamma_p(n/2))\ e^{-\lambda/2}$$

$$|V_s|^{(m-p-1)/2}|I+V_s|^{-(m+n)/2}\alpha_p(V_s)\Sigma_k((m+n)/2)_k$$

$$C_{(k)}(\lambda(I+V_s)^{-1}/2)/(n/2)_k C_{(k)}(I_p)k!$$

waar (k) 'n opsplitsing van k in slegs een komponent is.

Stelling 3.3.2

Indien $A \sim W(\Sigma,m)$ en $B \sim W(\Sigma,n,\Theta)$, Θ van rang $r \leq p$, word die verdelingsfunksie van die karakteristieke wortels van $Z = V^{-1}$ gegee deur

3.3.5 $f(Z_s) =$ / ...

3.3.5 $f(Z_s) = \pi^{p^2/2}\Gamma_p((m+n)/2)/(\Gamma_p(p/2)\Gamma_p(m/2)\Gamma_p(n/2))$

$\mathrm{esp}(-\theta_r/2)|Z_s|^{(n-p-1)/2}|I+Z_s|^{-(m+n)/2}\alpha_p(Z_s)$

$\Sigma_k\Sigma_K((m+n)/2)_K C_K(\theta_r/2)C_K((I+Z_s)^{-1}Z_s)/(n/2)_K$

$C_K(I_p)k!$

waar $Z_s = \mathrm{diag}(z_1,z_2,--,z_p)$ en K 'n opsplitsing van k in nie meer as r komponente is nie.

Bewys.

Indien r=p in 3.2.11 dan is $Z_{1.2} = Z$ en dus

$$f(Z) = \Gamma_p((m+n)/2)/(\Gamma_p(m/2)\Gamma_p(n/2))\mathrm{esp}(-\theta/2)|Z|^{(n-p-1)/2}$$
$$|I+Z|^{-(m+n)/2}{}_1F_1((m+n)/2\ ;\ n/2\ ;\ \theta(I+Z)^{-1}Z/2).$$

Stel $Z = H'V_s^{-1}H = H'Z_sH$ en integreer na H 'n element van die ortogonale groep. Aangesien θ van rang $r\leq p$ is, is die bewys nou dieselfde as die van afleiding 3.3.1

Die verdeling van die grootste karakteristieke wortel van V (of Z), naamlik v_1, kon egter tot nou toe nog nie gevind word nie en wel as gevolg van 'n integraal wat nie opgelos kan word nie. Die probleem is as volg: Stel $v_i/v_1 = y_{i-1}$ (i=2,--,p) in die gesamentlike verdeling van die karakteristieke wortels van V (3.3.1). Laat $Y = \mathrm{diag}(y_1,--,y_{p-1})$ en $Y^1 = \mathrm{diag}(1,y_1,--,y_{p-1})$. $J(V_s\rightarrow v_1,Y) = v_1^{p-1}$ en $\alpha_p(V_s) = v_1^{p(p-1)/2}|I-Y|\alpha_{p-1}(Y)$. Die gesamentlike verdeling van v_1 en Y word dus

3.3.6 $f(v_1,Y) = \pi^{p^2/2}\Gamma_p((m+n)/2)/(\Gamma_p(p/2)\Gamma_p(m/2)\Gamma_p(n/2))$

$\mathrm{esp}(-\theta/2)v_1^{mp/2\ -1}|Y|^{(m-p-1)/2}|I+v_1Y^1|^{-(m+n)/2}|I-Y|$

$\alpha_{p-1}(Y){}_1F_1((m+n)/2\ ;\ n/2\ ;\ \theta/2,(I+v_1Y^1)^{-1}),\ v_1>0,$

$0<Y<I.$

Die integraal/ ...

Die integraal na Y kon egter nog nie uitgevoer word nie.

3.4 Die verdelings van spV en spV^{-1}.

Om die verdeling van spV = T te kan aflei, is die volgende integraal nodig:

Hulp-stelling 3.4.1

3.4.1 $\int_{B>0} esp(-B)|B|^{a-(p+1)/2} C_K(RB)C_J(B)dB$

$$= \Gamma_p(a)C_K(R)/(C_K(I_p)) \Sigma_\delta \; g_{K,J}^{\delta}(a)_\delta C_\delta(I_p).$$

Bewys.

Daar bestaan 'n ortogonale matriks N sodanig dat

$$N'BN = B_s = \mathrm{diag}(b_1,--,b_p)$$

waar b_i die karakteristieke wortels van B is.

$$dB = \alpha_p(B_s)dB_s d(N).$$

d(N) is die invariante Haar maat, genormaliseer sodat die maat oor die hele groep een is (sien 1.2.8). Substitueer dus $B = NB_sN'$ in 3.4.1 en integreer na N (1.2.7), dan volg dat

$$\int_{B>0} esp(-B)|B|^{a-(p+1)/2} C_K(RB)C_J(B)dB$$

$$= \pi^{p^2/2}/(\Gamma_p(p/2))\int_{B_s>0} esp(-B_s)|B_s|^{a-(p+1)/2}\alpha_p(B_s)C_K(R)$$

$$C_K(B_s)C_J(B_s)/(C_K(I_p))dB_s$$

$$= \pi^{p^2/2}/(\Gamma_p(p/2))\int_{B_s>0} esp(-B_s)|B_s|^{a-(p+1)/2}\alpha_p(B_s)C_K(R)$$

$$(\Sigma_\delta g_{K,J}^{\delta} C_\delta(B_s))/(C_K(I_p))dB_s.$$

Deur term-vir-term te integreer na B_s wat toelaatbaar is, volg die integraal (Sugiyama (1966))

3.4.2 $\int_{B_s>0} esp(-B_s)|B_s|^{a-(p+1)/2}\alpha_p(B_s)C_\delta(B_s)dB_s$

$$= \Gamma_p(p/2)\Gamma_p(a)(a)_\delta C_\delta(I_p)/\pi^{p^2/2},$$

en dus die hulp-stelling.

Stelling 3.4.1/ ...

Stelling 3.4.1

Indien $A \sim W(\Sigma,m)$ en $B \sim W(\Sigma,n,\Theta)$, Θ van rang p, word die verdelingsfunksie van $T=\mathrm{sp}V$ gegee deur

3.4.3 $$f(T) = \Gamma_p((m+n)/2)/(\Gamma_p(n/2)\Gamma(mp/2))\mathrm{esp}(-\Theta/2)\Sigma_k\Sigma_K\Sigma_j\Sigma_J\Sigma_\delta$$
$$g_{K,J}^{\delta}\ T^{mp/2\ +j-1}(-1)^j(m/2)_J((m+n)/2)_\delta C_K(\Theta/2)$$
$$C_\delta(I_p)/((mp/2)_j(n/2)_K C_K(I_p)k!j!,\ T>0.$$

Bewys.

Die verdeling van T sal gedefinieer word deur die inverse van die Laplace-getransformeerde

$$g(t) = E(e^{-tT}) = E(\mathrm{esp}(-tV))$$

se verdelingsfunksie te neem. Volgens 3.2.1

3.4.4 $$g(t) = (1/\Gamma_p(m/2)\Gamma_p(n/2)|2\Sigma|^{(m+n)/2})\mathrm{esp}(-\Theta/2)\int_{V>0}$$
$$|V|^{(m-p-1)/2}\mathrm{esp}(-\Sigma^{-1}B/2)\mathrm{esp}(-(\tfrac{1}{2}B^{1/2}\Sigma^{-1}B^{1/2}+tI)V)$$
$$|B|^{(m+n-p-1)/2}{}_0F_1(n/2\ ;\ \Theta\Sigma^{-1}B/4)dBdV.$$

Integreer eers na V met behulp van 1.3.2, d.i.

$$\int_{V>0}\mathrm{esp}(-(\tfrac{1}{2}B^{1/2}\Sigma^{-1}B^{1/2}+tI)V)|V|^{(m-p-1)/2}dV$$
$$= \Gamma_p(m/2)|\tfrac{1}{2}B^{1/2}\Sigma^{-1}B^{1/2}+tI|^{-m/2}$$
$$= \Gamma_p(m/2)t^{-mp/2}\Sigma_j\Sigma_J(m/2)_J C_J(-t^{-1}\Sigma^{-1}B/2) \quad \text{(sien 1.2.11)}$$

Substitueer hierdie oplossing in 3.4.4 en integreer na B, d.i. die integraal (hierdie integrasie is toelaatbaar)

$$\int_{B>0}\mathrm{esp}(-\Sigma^{-1}B/2)|B|^{(m+n-p-1)/2}C_J(-t^{-1}\Sigma^{-1}B/2)C_K(\Theta\Sigma^{-1}B/4)dB.$$

Transformeer $B \to 2\Sigma^{1/2}B\Sigma^{1/2}$, $J = |\Sigma|^{(p+1)/2}$, en integreer volgens 3.4.1, d.i.

3.4.5 $$\int_{B>0}\mathrm{esp}(-\Sigma^{-1}B/2)|B|^{(m+n-p-1)/2}C_J(-\Sigma^{-1}B/2t)C_K(\Theta\Sigma^{-1}B/4)dB$$
$$= |2\Sigma|^{(m+n)/2}\int_{B>0}\mathrm{esp}(-B)|B|^{(m+n-p-1)/2}C_J(-B/t)C_K(\Theta B/2)dB$$

= / ...

$$= |2\Sigma|^{(m+n)/2}(-t)^{-j}\Gamma_p((m+n)/2)C_K(\Theta/2)/(C_K(I_p))\Sigma_\delta g_{K,J}^{\delta}$$

$$((m+n)/2)_\delta C_\delta(I_p).$$

3.4.4 is derhalwe

$$3.4.6 \quad g(t) = \Gamma_p((m+n)/2)/(\Gamma_p(n/2))\mathrm{esp}(-\Theta/2)\Sigma_k\Sigma_K\Sigma_j\Sigma_J\Sigma_\delta g_{K,J}^{\delta}(-1)^j$$

$$t^{-mp/2\ -j}(m/2)_J((m+n)/2)_\delta C_K(\Theta/2)C_\delta(I_p)/((n/2)_K$$

$$C_K(I_p)k!j!).$$

Deur nou gebruik te maak van die Laplace-inverse (sien Constantine (1966))

$$f(T) = (1/2\pi i)\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{tT}g(t)dt$$

en term-vir-term te integreer wat toelaatbaar is, volg die integraal

$$(1/2\pi i)\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{tT}t^{-(mp/2+j)}dt$$

$$= T^{mp/2\ +j-1}/\Gamma(mp/2)(mp/2)_j$$

en dus die stelling.

Indien Θ van rang $r<p$ is, volg die verdeling van T maklik deur Θ 3.4.3 met Θ_r te vervang. K is dan 'n opsplitsing van k in nie meer as r komponente nie. Indien $\Theta=0$, dan is

$$f(T) = \Gamma_p((m+n)/2)/(\Gamma_p(n/2)\Gamma(mp/2))\Sigma_j\Sigma_J T^{mp/2\ +j-1}(-1)^j$$

$$m/2)_J((m+n)/2)_J C_J(I_p)/(mp/2)_j j!$$

soos gedefinieer deur Constantine (1966).

Om die verdeling van $S=\mathrm{sp}Z=\mathrm{sp}V^{-1}$ te kan definieer, is die volgende hulp-stelling nodig:

<u>Hulp-stelling 3.4.2</u>

$$3.4.7 \quad |I+R|^{-a}(a)_K C_K((I+R^{-1})^{-1}) = \Sigma_j\Sigma_J\Sigma_\delta g_{K,J}^{\delta}(-1)^j(a)_\delta C_\delta(R)/j!,$$

$$R>0.$$

Bewys./ ...

Bewys.

Beskou die integraal wat duidelik konvergent is

$$\int_{S>0} \text{esp}(-(I+R)S)|S|^{a-(p+1)/2}C_K(RS)dS$$

$$= \Gamma_p(a)|I+R|^{-a}(a)_K C_K((I+R^{-1})^{-1}).$$

Hierdie integraal kan ook as volg beskou word:

$$\int_{S>0} \text{esp}(-(I+R)S)|S|^{a-(p+1)/2}C_K(RS)dS$$

$$= \Sigma_j\Sigma_J \int_{S>0} \text{esp}(-S)|S|^{a-(p+1)/2}(-1)^j C_J(RS)C_K(RS)dS$$

$$= \Sigma_j\Sigma_J\Sigma_\delta g_{K,J}^{\delta}(-1)^j/(j!) \int_{S>0} \text{esp}(-S)|S|^{a-(p+1)/2}C_\delta(RS)dS$$

$$= \Sigma_j\Sigma_J\Sigma_\delta g_{K,J}^{\delta}(-1)^j\Gamma_p(a)(a)_\delta C_\delta(R)/j!.$$

Stel hierdie twee oplossings gelyk en die hulp-stelling volg.

Stelling 3.4.2

Indien $A\sim W(\Sigma,m)$ en $B\sim W(\Sigma,n,\Theta)$, Θ van rang p, word die verdelingsfunksie van $S=\text{sp}V^{-1}$ gegee deur

3.4.8 $$f(S) = \Gamma_p((m+n)/2)/(\Gamma_p(m/2)\Gamma(np/2))\text{esp}(-\Theta/2)\Sigma_k\Sigma_K\Sigma_j\Sigma_J\Sigma_\delta g_{K,J}^{\delta}S^{np/2\ +k+j-1}(-1)^j(n/2)_\delta((m+n)/2)_\delta C_K(\Theta/2) C_\delta(I_p)/(n/2)_K(np/2)_{k+j}C_K(I_p)k!j!,\quad S>0.$$

Bewys.

Aangesien die karakteristieke wortels van $V^{-1}=B^{1/2}A^{-1}B^{1/2}$ dieselfde is as die karakteristieke wortels van $A^{-1/2}BA^{-1/2}$, stel $Z = A^{-1/2}BA^{-1/2}$. Dus $\text{sp}Z = \text{sp}V^{-1}$. Aangesien die karakteristieke wortels van Z onafhanklik is van die transformasies $A\to 2\Sigma^{1/2}A\Sigma^{1/2}$ en $B\to 2\Sigma^{1/2}B\Sigma^{1/2}$, kan die Laplace-getransformeerde funksie van $S=\text{sp}Z$ geskrywe word as

3.4.9 $$g(t) = E(e^{-tS}) = (1/\Gamma_p(m/2)\Gamma_p(n/2))\text{esp}(-\Theta/2)\int_{Z>0}\int_{A>0} |Z|^{(m-p-1)/2}|A|^{(m+n-p-1)/2}\text{esp}(-A)\text{esp}(-(A+tI)Z)\ {}_0F_1(n/2\ ;\ \Theta A^{1/2}ZA^{1/2}/2)dAdZ.$$

Die integraal/ ...

Die integraal na Z is naamlik

3.4.10 $\int_{Z>0}|Z|^{(n-p-1)/2}\mathrm{esp}(-(A+tI)Z)C_K(A^{1/2}\Theta A^{1/2}Z/2)dZ$

$= \Gamma_p(n/2)|A+tI|^{-n/2}(n/2)_K C_K(A^{1/2}\Theta A^{1/2}(A+tI)^{-1}/2)$

$= \Gamma_p(n/2)t^{-np/2}|\frac{1}{t}A+I|^{-n/2}(n/2)_K C_K(\Theta(I+tA^{-1})^{-1}/2)$

Derhalwe is

3.4.11 $g(t) = (1/\Gamma_p(m/2))t^{-np/2}\mathrm{esp}(-\Theta/2)\int_{A>0}\mathrm{esp}(-A)|A|^{(m+n-p-1)/2}$

$\Sigma_k\Sigma_K(n/2)_K|\frac{1}{t}A+I|^{-n/2}C_K(\Theta(I+tA^{-1})^{-1}/2)/((n/2)_K k!)$

$dA.$

Daar bestaan 'n ortogonale matriks M sodanig dat

$M'AM = A_s = \mathrm{diag}(a_1,--,a_p).$

$dA = \alpha_p(A_s)dA_s d(M)$. Stel $A=MA_sM'$ in 3.4.11 en maak gebruik van 1.2.7 en 1.2.8. Dan

3.4.12 $g(t) = \pi^{p^2/2}/(\Gamma_p(p/2)\Gamma_p(m/2))t^{-np/2}\mathrm{esp}(-\Theta/2)\Sigma_k\Sigma_K$

$\int_{A_s>0}\mathrm{esp}(-A_s)|A_s|^{(m+n-p-1)/2}\alpha_p(A_s)|\frac{1}{t}A_s+I|^{-n/2}$

$C_K(\Theta/2)C_K((I+tA_s^{-1})^{-1})(n/2)_K/((n/2)_K C_K(I_p)k!)dA_s.$

Volgens 3.4.7 is

$|\frac{1}{t}A_s+I|^{-n/2}(n/2)_K C_K((I+tA_s^{-1})^{-1})$

$= \Sigma_j\Sigma_J\Sigma_\delta g_{K,J}^{\delta}(n/2)_\delta(-1)^j C_\delta(A_s/t)/j!$

indien **R** deur A_s/t vervang word. Derhalwe kan 3.4.12 geskrywe word

$g(t) = \pi^{p^2/2}/(\Gamma_p(p/2)\Gamma_p(m/2))t^{-np/2}\mathrm{esp}(-\Theta/2)\Sigma_k\Sigma_K\Sigma_j\Sigma_J\Sigma_\delta g_{K,J}^{\delta}(-1)^j$

$(n/2)_\delta C_K(\Theta/2)/(n/2)_K C_K(I_p)k!j!)\int_{A_s>0}\mathrm{esp}(-A_s)|A_s|^{(m+n-p-1)/2}$

$\alpha_p(A_s)C_\delta(A_s/t)dA_s.$

Integreer na A_s met behulp van 3.4.2. Dus

3.4.13 g(t)/ ...

3.4.13 $g(t) = \Gamma_p((m+n)/2)/(\Gamma_p(m/2))\mathrm{esp}(-\Theta/2)\Sigma_k\Sigma_K\Sigma_j\Sigma_J\Sigma_\delta g^\delta_{K,J}$

$$(-1)^j t^{-(np/2\ +k+j)}(n/2)_\delta((m+n)/2)_\delta C_K(\Theta/2)C_\delta(I_p)$$

$$((n/2)_K C_K(I_p)k!j!)^{-1}.$$

Neem die Laplace-inverse met

$$(1/2\pi i)\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{tS} t^{-(np/2\ +k+j)}dt$$

$$= S^{np/2\ +k+j-1}/\Gamma(np/2\ +k+j)$$

en die bewys is voltooi.

Indien Θ van rang $r\leq p$ is, is die verdeling van S voor die hand liggend.

Constantine (1966) definieer egter die verdeling van S in terme van Laguerre-polinome, naamlik

3.4.14 $f(S) = \Gamma_p((m+n)/2)/(\Gamma_p(m/2)\Gamma(np/2))\mathrm{esp}(-\Theta/2)\Sigma_k\Sigma_K(-1)^k$

$$S^{np/2\ +k-1}((m+n)/2)_K L_K^\nu(\Theta/2)/(np/2)_k k!$$

waar $\nu=(n-p-1)/2$ en $L_K^\nu(\Theta/2)$ 'n Laguerre-polinoom is met voorskrif

$$L_K^\nu(\Theta/2) = (\nu+p)_K C_K(I_p)\Sigma_{j=0}^k(-1)^j a_{K,J}C_J(\Theta/2)/((\nu+p)_J C_J(I_p)).$$

J is 'n opsplitsing van j in nie meer as p komponente nie en $a_{K,J}$ 'n konstant wat volg uit die verwantskap

$$C_K(I-\Theta)/C_K(I_p) = \Sigma_{j=0}^k\Sigma_J(-1)^j a_{K,J}C_J(\Theta)/C_J(I_p).$$

Die waarde $a_{K,J}$ is deur Constantine (1966) getabuleer vir $k=1(1)6$.

Indien 3.4.3 met 3.4.8 vergelyk word, volg 'n redelike mate van ooreenkoms, maar dit lyk nie of 'n algemene reël bestaan waaruit die een verdeling uit die ander herlei kan word nie.

Omdat $\mathrm{sp}V = \mathrm{sp}L(I-L)^{-1}$ en $\mathrm{sp}V^{-1} = \mathrm{sp}L^{-1}(I-L)$ is die verdelings van $\mathrm{sp}L(I-L)^{-1}$ en $\mathrm{sp}L^{-1}(I-L)$ dus ook bekend.

3.5 Die verdeling van V in terme van onafhanklike beta-verdelings van die tweede soort.

Beskou die verdeling van V indien Θ van rang $r<p$ is soos gedefinieer in 3.2.6, d.i.

3.5.1 $$\beta_1(V\ ;\ m/2,n/2,\Theta_r/2) \propto \text{esp}(-\Theta_r/2)|V|^{(m-p-1)/2}|I+V|^{-(m+n)/2}$$
$$ {}_1F_1((m+n)/2\ ;\ n/2\ ;\ \Theta_r(I+V_{1.2})^{-1}/2)$$

indien die konstante term geïgnoreer word.

Stelling 3.5.1

Indien $V \sim \beta_2(m/2,n/2,\Theta_r/2)$, $r<p$, kan die verdelingsfunksie van V geskrywe word as

3.5.2 $$\beta_2(V\ ;\ m/2,n/2,\Theta_r/2) = f_1(V_{1.2})\prod_{i=r+1}^{p} f_i(s_i)\prod_{j=1}^{i-1}$$
$$f_{ij}(z_{ij})$$

waar $V_{1.2}(rxr) \sim \beta_2(m/2,n/2,\Theta_r/2)$,

$s_i \sim \beta_2(m/2,(n+1-i)/2)$ en

$z_{ij} \sim \beta_2((m-i+j)/2,1/2)$.

Bewys.

Onder die opsplitsing $V = \begin{pmatrix} V_{11} & V_{12} \\ V_{21} & V_{22} \end{pmatrix}$, V_{11} van orde r,

volg dat

$$|I+V| = |I+V_{22}||I+V_{1.2}|$$

waar $V_{1.2} = V_{11}-V_{12}(I+V_{22})^{-1}V_{21}$. $J(V_{11} \rightarrow V_{1.2}) = 1$.

$$|V| = |V_{22}||V_{1.2}-V_{12}(I+V_{22})^{-1}V_{22}^{-1}V_{21}|$$
$$= |V_{22}||V_{1.2}-UU'|$$

waar $U = V_{12}((I+V_{22})^{-1}V_{22}^{-1})^{1/2}$.

$$J(V_{12} \rightarrow U) = |(I+V_{22})^{-1}V_{22}^{-1}|^{-r/2} \quad \text{(sien 2.6.4)}$$
$$= |I+V_{22}|^{r/2}|V_{22}|^{r/2}.$$

Die verdelings-/ ...

Die verdelingsfunksie van V (3.5.1) kan dus geskrywe word

$$f(V) \propto \mathrm{esp}(-\theta/2)|V_{1.2}-UU'|^{(m-p-1)/2}|I+V_{1.2}|^{-(m+n)/2}|V_{22}|^{(m-p+r-1)/2}$$

$$|I+V_{22}|^{-(m+n-r)/2}\,{}_1F_1((m+n)/2\ ;\ n/2\ ;\ \theta_r(I+V_{1.2})^{-1}/2).$$

Laat $T = V_{1.2}^{-1/2}U$, $J(U \to T) = |V_{1.2}|^{(p-r)/2}$. Dus

3.5.3 $$f(V) \propto \mathrm{esp}(-\theta/2)|V_{1.2}|^{(m-r-1)/2}|I+V_{1.2}|^{-(m+n)/2}$$

$$ {}_1F_1((m+n)/2\ ;\ n/2\ ;\ \theta_r(I+V_{1.2})^{-1}/2)$$

$$|V_{22}|^{(m-(p-r)-1)/2}|I+V_{22}|^{-(m+n-r)/2}$$

$$|I-TT'|^{(m-p-1)/2},$$

d.i.

3.5.4 $$f(V) = f_1(V_{1.2})f_2(V_{22})f_3(T)$$

waar $V_{1.2}(rxr) \sim \beta_2(m/2,n/2,\theta_r/2)$

$V_{22}(p-rxp-r) \sim \beta_2(m/2,(n-r)/2)$

en $f_3(T) \propto |I-TT'|^{(m-p-1)/2}$.

Beskou die verdeling van $T(rxp-r)$.

Laat $T = (T_1, T_2, \text{--}, T_{p-r})$, dan

$$|I-TT'| = |I-\Sigma_{k=1}^{p-r}\ T_kT_k'|$$

$$= \begin{vmatrix} I-\Sigma_{k=1}^{p-r-1}T_kT_k' & T_{p-r} \\ T_{p-r}' & 1 \end{vmatrix}$$

$$= |I-\Sigma_{k=1}^{p-r-1}T_kT_k'|(1-T_{p-r}'(I-\Sigma_{k=1}^{p-r-1}T_kT_k')^{-1}T_{p-r}).$$

Laat $D_{p-r} = (I-\Sigma_{k=1}^{p-r-1}T_kT_k')^{-1/2}T_{p-r}$,

$J(T_{p-r} \to D_{p-r}) = |I-\Sigma_{k=1}^{p-r-1}T_kT_k'|^{1/2}$, dan

$|I-TT'| = |I-\Sigma_{k=1}^{p-r-1}T_kT_k'|(1-D_{p-r}'D_{p-r})$. Deur $|I-\Sigma_{k=1}^{p-r-1}T_kT_k'|$

nou te beskou en die prosedure te herhaal, volg dat

3.5.5 $|I-TT'|=/$ ...

3.5.5 $|I-TT'| = \prod_{i=1}^{p-r-1} (1-D_i'D_i), \quad D_1 = T_1.$

Stel $D = (D_1, D_2, --, D_{p-r})$, dan is

3.5.6 $J(T \to D) = \prod_{i=1}^{p-r-1} (1-D_i'D_i)^{(p-r-i)/2}.$

Laat $D_i = Y_i = \begin{pmatrix} 1/(1+y_{i1})^{1/2} \\ y_{i1}^{1/2}/(1+y_{i1})^{1/2}(1+y_{i2})^{1/2} \\ ----------- \\ y_{i1}^{1/2}..y_{i,r-1}^{1/2}/(1+y_{i1})^{1/2}..(1+y_{ir})^{1/2} \end{pmatrix}$

met

$$J(D_i \to Y_i) = \begin{vmatrix} -1/2(1+y_{i1})^{3/2} & 0 & --- 0 \\ & -y_{i1}^{1/2}/2(1+y_{i1})^{1/2}(1+y_{i2})^{3/2} & --- 0 \\ ------ & ------ & ------ \\ & & \dfrac{-y_{i1}^{1/2}..y_{i,r-1}^{1/2}}{2(1+y_{i1})^{1/2}..(1+y_{ir})^{3/2}} \end{vmatrix}$$

$$= (-1/2)^r \prod_{j=1}^{r} y_{ij}^{(r-j)/2}/(1+y_{ij})^{(r-j+3)/2}.$$

Dus

3.5.7 $J(D \to Y) = (-1/2)^{r(p-r)} \prod_{i=1}^{p-r} \prod_{j=1}^{r} y_{ij}^{(r-j)/2}/(1+y_{ij})^{(r-j+3)/2}$

waar $Y = (Y_1, --, Y_{p-r})$. Aangesien $(1-D_i'D_i) = \prod_{j=1}^{r} y_{ij}/(1+y_{ij})$,

volg saam met 3.5.5 dat

3.5.8 $|I-TT'| = \prod_{i=1}^{p-r-1} (1-D_i'D_i)$

$$= \prod_{i=1}^{p-r} \prod_{j=1}^{r} y_{ij}/(1+y_{ij})$$

en saam met 3.5.6 en 3.5.7 dat

3.5.9 $J(T \to Y) = J(T \to D)\, J(D \to Y)$

$$= (-1/2)^{r(p-r)} \prod_{i=1}^{p-r} \prod_{j=1}^{r} y_{ij}^{(p-i-j)/2}/(1+y_{ij})^{(p-r-i)/2}$$

Die verdelingsfunksie van T kan derhalwe geskrywe word as

3.5.10 $f_3(T) = g(Y) \propto \prod_{i=1}^{p-r} \prod_{j=1}^{r} y_{ij}^{(m-i-j-1)/2}/(1+y_{ij})^{(m-i-j+2)/2}$

$$= \prod_{i=1}^{p-r} \prod_{j=1}^{r} \beta_2(y_{ij}\ ;\ (m-i-j+1)/2, 1/2).$$

Beskou/ ...

Beskou nou die verdeling van V_{22} soos dit voorkom in 3.5.4, naamlik $V_{22} \sim \beta_2(m/2,(n-r)/2)$.

Om aan te toon dat die verdeling van V_{22} geskrywe kan word as die produk van onafhanklike beta-verdelings van die tweede soort sal van 3.5.4 gebruik gemaak word. Vir geriefshalwe sal die verdeling van V in die sentrale geval beskou word deur Θ_r nul te neem. Die verdeling van V_{22} kan dan maklik gevind word deur p met p-r en n met n-r te vervang. Indien $\Theta_r=0$, is $V \sim \beta_2(m/2,n/2)$ en $V_{1.2} \sim \beta_2(m/2,n/2)$. Stel r=1, dan volgens 3.5.4 is

$$f(V) = f_1(v_{1.2})f_2(V_{22})f_3(T), \quad \text{d.i.}$$

$$\beta_2(V(pxp);\ m/2,n/2) = \beta_2(v_{1.2}\ ;\ m/2,n/2)\beta_2(V_{22}(p-1xp-1);m/2,(n-1)/2)$$
$$\prod_{i=1}^{p-1}\beta_2(y_{i1}\ ;\ (m-i)/2,1/2).$$

Dus

$$\beta_2(V_{22}(p-1xp-1);\ m/2,(n-1)/2) = \beta_2(v_{2.3}\ ;\ m/2,(n-1)/2)\ x$$
$$\beta_2(V_{33}(p-2xp-2);\ m/2,\ (n-2)/2)\prod_{i=1}^{p-2}\beta_2(y_{i2};(m-i)/2,1/2)$$

$$\beta_2(V_{33}(p-2xp-2);\ m/2,(n-2)/2) = \beta_2(v_{3.4}\ ;\ m/2,(n-2)/2)\ x$$
$$\beta_2(V_{44}(p-3xp-3);\ m/2,(n-3)/2)\prod_{i=1}^{p-3}\beta_2(y_{i3};(m-i)/2,1/2)$$

- - - - - - -

$$\beta_2(V_{p-1,p-1}(2x2);\ m/2,(n-p+2)/2) = \beta_2(v_{p-1.p}\ ;\ m/2,(n-p+2)/2)$$
$$\beta_2(v_{pp}\ ;\ m/2,(n-p+1)/2)\beta_2(y_{1,p-1};\ (m-1)/2,1/2)$$

waar $V_{ii} = \begin{pmatrix} v_{ii} & v_{i,i+1} & -- & v_{ip} \\ - & - & - & - \\ v_{pi} & v_{p,i+1} & -- & v_{pp} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_{ii} & v_{(i)} \\ v'_{(i)} & V_{i+1,i+1} \end{pmatrix}$

en $v_{i.i+1} = v_{ii}-v_{(i)}(I+V_{i+1,i+1})^{-1}v'_{(i)}$.

Dus

3.5.11 $$\beta_2(V(pxp);\ m/2,n/2) = \prod_{i=1}^{p-1}\beta_2(v_{i.i+1};\ m/2,(n-i+1)/2)\ x$$
$$\beta_2(v_{pp}\ ;\ m/2,(n-p+1)/2)\prod_{j=1}^{p-1}\prod_{i=1}^{p-j}\beta_2(y_{ij};(m-i)/2,1/2).$$

Vervang/ ...

Vervang p met p-r en n met n-r dan kan die verdelingsfunksie van $V_{22}(p-r x p-r)$ geskrywe word as

3.5.12 $\beta_2(V_{22}(p-r x p-r); m/2,(n-r)/2)$

$$=[\prod_{i=1}^{p-r}\beta_2(s_i \,;\, m/2,(n-r-i+1)/2)]\prod_{j=1}^{p-r-1}\prod_{i=1}^{p-r-j}\beta_2(t_{ij} \,;\, (m-i)/2,1/2).$$

Die skalar-veranderlikes s_i en t_{ij} is ingevoer om aan te toon dat hulle verskil van die in 3.5.11.

Kombineer die resultaat 3.5.12 met 3.5.10 dan

3.5.13
$$f_2(V_{22})f_3(T) = [\prod_{i=r+1}^{p}\beta_2(s_i \,;\, m/2,(n-r-i+1)/2)] \times [\prod_{j=1}^{p-r-1}\prod_{i=1}^{p-r-j}\beta_2(t_{ij} \,;\, (m-i)/2,1/2)] \times [\prod_{i=1}^{p-r}\prod_{j=1}^{r}\beta_2(y_{ij} \,;\, (m-i-j+1)/2,1/2)].$$

Dit kan nou aangetoon word dat die produk van die laaste twee terme in vierkante hakies geskrywe kan word as

$$[\prod_{j=1}^{p-r-1}\prod_{i=1}^{p-r-j}\beta_2(t_{ij} \,;\, (m-i)/2,1/2)][\prod_{i=1}^{p-r}\prod_{j=1}^{r}\beta_2(y_{ij} \,;\, (m-i-j+1)/2,1/2) = \prod_{i=r+1}^{p}\prod_{j=1}^{i-1}\beta_2(z_{ij} \,;\, (m-i+j)/2,1/2)$$

waar z_{ij} 'n ander veranderlike aandui. 3.5.13 word derhalwe

3.5.14
$$f_2(V_{22})f_3(T) = \prod_{i=r+1}^{p}\beta_2(s_i \,;\, m/2,(n-i+1)/2) \times \prod_{j=1}^{i-1}\beta_2(z_{ij} \,;\, (m-i+j)/2,1/2).$$

Substitueer hierdie resultaat in 3.5.4 en die stelling is bewys.

Stelling 3.5.2

Indien $V\sim\beta_2(m/2,n/2,\Theta_r/2)$, $r<p$, dan kan die verdelingsfunksie van $|V|$ geskrywe word as

3.5.15 $$f(|V|) = f_1(|V_{1.2}|)\prod_{i=r+1}^{p}f_i(x_i)$$

waar $V_{1.2}\sim\beta_2(m/2,n/2,\Theta_r/2)$ en $x_i\sim\beta_2((m-i+1)/2,n-i+1)/2)$.

Bewys.

Volgens 3.2.8 is

$E|V|^h/$ ...

$$E|V|^h = \Gamma_p(m/2+h)\Gamma_p(n/2-h)/(\Gamma_p(m/2)\Gamma_p(n/2))\mathrm{esp}(-\theta_r/2)$$

$$\quad {}_1F_1(n/2-h\ ;\ n/2\ ;\ \theta_r/2)$$

$$= \Gamma_r(m/2+h)\Gamma_r(n/2-h)/(\Gamma_r(m/2)\Gamma_r(n/2))\mathrm{esp}(-\theta_r/2)$$

$$\quad {}_1F_1(n/2-h\ ;\ n/2\ ;\ \theta_r/2)\prod_{i=r+1}^{p}[\Gamma((m-i+1)/2+h)$$

$$\quad \Gamma((n-i+1)/2-h)/(\Gamma((m-i+1)/2)\Gamma((n-i+1)/2)]$$

$$= E|V_{1.2}|^h\prod_{i=r+1}^{p}E(x_i)^h$$

aangesien $\Gamma(a+h)\Gamma(b-h)/(\Gamma(a)\Gamma(b)) = \int_{x>0}x^h\beta_2(x\ ;\ a,b)dx$ en $E|V_{1.2}|^h$ na analogie van 3.2.4 volg.

Die verdeling van $|I+V|^{-1}$ kan op 'n soortgelyke wyse beskou word, maar aangesien $|I+V|^{-1} = |I-L|$ wat reeds in paragraaf 2.6 aandag geniet het, sal dit nie weer beskou word nie.

HOOFSTUK IV.

DIE NIE-SENTRALE MEERVERANDERLIKE DIRICHLET-VERDELINGS.

4.1 Inleiding.

In hierdie hoofstuk word die gesamentlike verdeling van

$$L_j = (\Sigma_j A_j + B)^{-1/2} A_j (\Sigma_j A_j + B)^{-1/2}, \quad j=1,--,q,$$

ondersoek asook die gesamentlike verdeling van

$$V_j = B^{-1/2} A_j B^{-1/2}, \quad j=1,--,q.$$

In 4.2 word die gesamentlike verdeling van L_1, --, L_q gedefinieer vir die gevalle $A_j \sim W(\Sigma, m_j)$ $(j=1,--,q)$ en $B \sim W(\Sigma, n, \Theta)$, Θ van rang $r \leq p$, en $A_j \sim W(\Sigma_1, m_j)$ en $B \sim W(\Sigma_2, n)$. In 4.3 word die asimptotiese verdeling van $\prod_j |L_j|$ gevind in beide die gevalle. In 4.4 word die gesamentlike verdeling van V_1, --, V_q gedefinieer indien $A_j \sim W(\Sigma, m_j)$ en $B \sim W(\Sigma, n, \Theta)$, Θ van rang $r \leq p$. In 4.5 word die eksakte verdeling van $sp(\Sigma_j V_j)$ afgelei.

4.2 Die nie-sentrale meerveranderlike dirichlet-verdeling van die eerste soort.

Stelling 4.2.1

Indien $A_j \sim W(\Sigma, m_j)$, $j=1,--,q$, en $B \sim W(\Sigma, n, \Theta)$, Θ van rang p, word die gesamentlike verdelingsfunksie van L_1, --, L_q gegee deur

4.2.1 $$f(L_1,--,L_q) = (1/\Gamma_p(n/2)\prod_j \Gamma_p(m_j/2))|2\Sigma|^{-(m+n)/2} esp(-\Theta/2)$$
$$\prod_j |L_j|^{(m_j-p-1)/2} |I-\Sigma_j L_j|^{(n-p-1)/2} \int_{T>0} esp(-\Sigma^{-1}T/2)$$
$$|T|^{(m+n-p-1)/2} {}_0F_1(n/2\ ;\ \Theta\Sigma^{-1}T^{1/2}(I-\Sigma_j L_j)T^{1/2}/4)dT,$$
$$m=\Sigma_j m_j,\quad I-\Sigma_j L_j>0,\quad 0<L_j<I.$$

Bewys.

Die gesamentlike verdelingsfunksie van A_1, --, A_q en B word gegee deur

$f(A_1,--,A_q,B)/$ ...

$$f(A_1,--,A_q,B) = (1/\Gamma_p(n/2)\prod_j\Gamma_p(m_j/2))|2\Sigma|^{-(m+n)/2}\mathrm{esp}(-\theta/2)$$

$$\mathrm{esp}(-\Sigma^{-1}(\Sigma_jA_j+B)/2)\prod_j|A_j|^{(m_j-p-1)/2}|B|^{(n-p-1)/2}$$

$$_0F_1(n/2\ ;\ \theta\Sigma^{-1}B/4),\quad m=\Sigma_jm_j.$$

Stel $L_j = T^{-1/2}A_jT^{-1/2}$, $T = \Sigma_jA_j+B$.

$J(A_1,--,A_q,B\to L_1,--,L_q,T) = |T|^{q(p+1)/2}$. Integrasie na T in die gesamentlike verdeling van L_1, --, L_q en T lewer die stelling.

Die verdeling 4.2.1 word geklassifiseer as 'n nie-sentrale meerveranderlike dirichlet-verdeling van die eerste soort van volle rang, met andere woorde (sien Troskie (1966))

$$L_1,\ L_2,\ --,\ L_q\sim D_1(m_1/2,--,m_q/2,n/2,\theta/2).$$

Die h-de momente van $\prod_j|L_j|$ en $|I-\Sigma_jL_j|$ kan uit 4.2.1 gevind word deur gebruik te maak van die volgende integraal:

4.2.2 $$\int_0^I\!\!\cdots\!\int\prod_j|L_j|^{a_j-(p+1)/2}|I-\Sigma_jL_j|^{b-(p+1)/2}C_K(R(I-\Sigma_jL_j))\prod_jdL_j$$

$$= \prod_j\Gamma_p(a_j)\Gamma_p(b,K)/\Gamma_p(a+b,K)\cdot C_K(R),\quad a=\Sigma_ja_j.$$

Hierdie integraal kan uit 4.2.1 herlei word, maar word in 4.4 bewys. Indien j=1 volg 2.2.2.

Deur eers met betrekking tot L_1, L_2, --, L_q te integreer volgens bostaande integraal en dan na T volgens 1.3.4 volg dat

4.2.3 $$E\prod_j|L_j|^{h_j} = \prod_j\Gamma_p(m_j/2+h_j)/(\Gamma_p((m+n)/2+h)\prod_j\Gamma_p(m_j/2))$$

$$|2\Sigma|^{-(m+n)/2}\mathrm{esp}(-\theta/2)\int_{T>0}\mathrm{esp}(-\Sigma^{-1}T/2)|T|^{(m+n-p-1)/2}$$

$$_0F_1((m+n)/2+h\ ;\ \theta\Sigma^{-1}T/4)dT$$

$$= \Gamma_p((m+n)/2)\prod_j\Gamma_p(m_j/2+h_j)/(\Gamma_p((m+n)/2+h)$$

$$\prod_j\Gamma_p(m_j/2))\mathrm{esp}(-\theta/2)\,{}_1F_1((m+n)/2\ ;\ (m+n)/2+h;\theta/2),$$

$$h=\Sigma_jh_j,$$

en / ...

4.2.4 $E|I-\Sigma_j L_j|^h = \Gamma_p(n/2+h)\Gamma_p((m+n)/2)/(\Gamma_p(n/2)\Gamma_p((m+n)/2+h))$

$$\text{esp}(-\theta/2)\,{}_2F_2(n/2+h,(m+n)/2\ ;\ n/2,(m+n)/2+h;\theta/2).$$

Laasgenoemde resultaat is dieselfde as die van 2.2.4.

Afleiding 4.2.1

Indien $A_j \sim W(\Sigma,m_j)$, $j=1,--,q$, en $B\sim W(\Sigma,n,\theta)$, θ diagonaal en van rang $r<p$, word die gesamentlike verdelingsfunksie van L_1, L_2, --, L_q gegee deur

4.2.5 $f(L_1,--,L_q) = \Gamma_p((m+n)/2)/(\Gamma_p(n/2)\Gamma_r((m+n)/2)\prod_j\Gamma_p(m_j/2))$

$$|2I_r|^{-(m+n)/2}\text{esp}(-\theta_r/2)\prod_j|L_j|^{(m_j-p-1)/2}$$

$$|I-\Sigma_j L_j|^{(n-p-1)/2}\int_{T_{11}>0}\text{esp}(-T_{11}/2)|T_{11}|^{(m+n-r-1)/2}$$

$${}_0F_1(n/2\ ;\ \theta_r T_{11}^{1/2}(I-\Sigma_j L_{11j})T_{11}^{1/2}/4)dT_{11}$$

waar $m=\Sigma_j m_j$ en $L_j = \begin{pmatrix} L_{11j} & L_{12j} \\ L_{21j} & L_{22j}\end{pmatrix}$ 'n opsplitsing van L_j in submatrikse is sodanig dat L_{11j} van orde r is.

Bewys.

Die bewys is soortgelyk as die van afleiding 2.2.1.

Die verdeling 4.2.5 is die nie-sentrale meerveranderlike dirichlet-verdeling van die eerste soort van rang r, met andere woorde indien θ van rang $r\leq p$ is, dan is

$$L_1,\ --,\ L_q \sim D_1(m_1/2,--,m_q/2,n/2,\theta_r/2).$$

Indien r=1 volg uit 4.2.5 dat

$D_1(L_1,--L_q;m_1/2,--,m_q/2,n/2,\lambda/2) = \Gamma_p((m+n)/2)/(\Gamma_p(n/2)$

$$\prod_j\Gamma_p(m_j/2))e^{-\lambda/2}\prod_j|L_j|^{(m_j-p-1)/2}|I-\Sigma_j L_j|^{(n-p-1)/2}$$

$${}_1F_1((m+n)/2\ ;\ n/2\ ;\ \lambda(1-\Sigma_j l_{11j})/2),\quad \theta_1=\lambda.$$

Hierdie resultaat is reeds deur Troskie (1966) afgelei.

Indien $\theta_r=0$ volg die sentrale verdeling soos aangetoon deur Olkin en Rubin (1964), naamlik

$D_1(L_1,--,L_q/$ ...

$$D_1(L_1,--,L_q;m_1/2,--,m_q/2,n/2) = \Gamma_p((m+n)/2)/(\Gamma_p(n/2)\prod_j \Gamma_p(m_j/2))\prod_j |L_j|^{(m_j-p-1)/2}|I-\Sigma_j L_j|^{(n-p-1)/2}.$$

Die h-de moment $E\prod_j |L_j|^{h_j}$ indien Θ van rang $r<p$ is, kan maklik gevind word uit 4.2.3 en die volgende afleiding kan daaruit gemaak word:

4.2.6 $$E\prod_j |L_j|^{h_j} = \Gamma_p((m+n)/2)\prod_j \Gamma_p(m_j/2 +h_j)/(\Gamma_p((m+n)/2 +h)\prod_j \Gamma_p(m_j/2))esp(-\Theta_r/2)\,{}_1F_1((m+n)/2;(m+n)/2 +h;\Theta_r/2)$$

$$= \Gamma_r((m+n)/2)\prod_j \Gamma_r(m_j/2 +h_j)/(\Gamma_r((m+n)/2 +h)\prod_j \Gamma_r(m_j/2))esp(-\Theta_r/2)\,{}_1F_1((m+n)/2;(m+n)/2 +h;\Theta_r/2)$$

$$[\prod_j \Gamma((m_j-i+1)/2 +h_j)/\Gamma((m_j-i+1)/2)]$$

$$\Gamma((m+n-i+1)/2)/\Gamma((m+n-i+1)/2 +h)$$

$$= E\prod_j |L_{11j}|^{h_j} \prod_{i=r+1} E\prod_j x_{ij}{}^{h_j}$$

waar $x_{i1},--,x_{iq} \sim D_1((m_1-i+1)/2,--,(m_q-i+1)/2,(n-(q-1)(1-i))/2)$ (sien Wilks (1962)). Dit volg as gevolg van die feit dat

$$\Gamma((m+n-i+1)/2)\prod_j \Gamma((m_j-i+1)/2 +h_j)/(\Gamma((m+n-i+1)/2 +h)\prod_j \Gamma((m_j-i+1)/2)) = \Gamma((m+n-i+1)/2)/(\Gamma((n-(q-1)(1-i))/2)\prod_j \Gamma((m_j-i+1)/2)\int_0^1 \cdots \int \prod_j x_{ij}{}^{(m_j-i+1+2h_j)/2 -1}$$

$$(1-\Sigma_j x_{ij})^{(n-(q-1)(1-i))/2 -1}\prod_j dx_{ij}.$$

Uit 4.2.6 volg ook dat L_{111}, --, L_{11q} verdeel is soos 'n niesentrale meerveranderlike dirichlet van die eerste soort van volle rang (vergelyk 4.2.3).

<u>Stelling 4.2.2</u>

Indien $A_j \sim W(\Sigma_1,m_j)$ $(j=1,--,q)$ en $B \sim W(\Sigma_2,n)$ word die verdelingsfunksie van L_1, --, L_q gegee deur

4.2.7 $f(L_1,--,L_q)/$ ...

4.2.7 $f(L_1,--,L_q) = (1/\Gamma_p(n/2)\prod_j\Gamma_p(m_j/2)|2\Sigma_1|^{m/2}|2\Sigma_2|^{n/2})$

$$\prod_j|L_j|^{(m_j-p-1)/2}|I-\Sigma_jL_j|^{(n-p-1)/2}\int_{T>0}\mathrm{esp}(-\Sigma_2^{-1}T/2)$$

$$|T|^{(m+n-p-1)/2}{}_0F_0(-T^{1/2}(\Sigma_1^{-1}-\Sigma_2^{-1})T^{1/2}\Sigma_jL_j/2)dT.$$

Bewys.

Die gesamentlike verdelingsfunksie van A_j ($j=1,--,q$) en B word gegee deur

$$f(A_1,--,A_q,B) = (1/\Gamma_p(n/2)\prod_j\Gamma_p(m_j/2)|2\Sigma_1|^{m/2}|2\Sigma_2|^{n/2})$$

$$\prod_j|A_j|^{(m_j-p-1)/2}|B|^{(n-p-1)/2}\mathrm{esp}(-(\Sigma_2^{-1}B+\Sigma_1^{-1}\Sigma_jA_j)/2),$$

$m=\Sigma_jm_j$. Onder die substitusie $L_j = T^{-1/2}A_jT^{-1/2}$, $T = \Sigma_jA_j+B$, kan die eksponent term geskrywe word as

$$\mathrm{esp}(-(\Sigma_2^{-1}B+\Sigma_1^{-1}\Sigma_jA_j)/2)$$

$$= \mathrm{esp}(-\tfrac{1}{2}[\Sigma_2^{-1}T^{1/2}(I-\Sigma_jL_j)T^{1/2} + \Sigma_1^{-1}T^{1/2}\Sigma_jL_jT^{1/2}])$$

$$= \mathrm{esp}(-\Sigma_2^{-1}T/2)\ {}_0F_0(-(\Sigma_1^{-1}-\Sigma_2^{-1})T^{1/2}\Sigma_jL_jT^{1/2}/2).$$

Integrasie na T in die gesamentlike verdeling van L_1, --, L_q en T lewer die resultaat.

Die volgende integraal kan nie bewys word nie, maar die oplossing blyk korrek te wees:

4.2.8 $\int_0^I\!\!--\!\!\int \prod_j|L_j|^{(m_j-p-1)/2}|I-\Sigma_jL_j|^{(n-p-1)/2}C_K(R\Sigma_jL_j)\prod_jdL_j$

$$=[\Gamma_p(n/2)\prod_j\Gamma_p(m_j/2)/\Gamma_p((m+n)/2)](m/2)_KC_K(R)/((m+n)/2)_K.$$

Omdat 4.2.7 'n verdelingsfunksie is, moet integrasie met betrekking tot L_j ($j=1,--,q$) een gee. Deur 4.2.7 eers na L_j ($j=1,--,q$) te integreer met behulp van 4.2.8 en dan na T met behulp van 1.3.4, word 1 verkry. 'n Verdere aanduiding dat die integraal korrek is, is dat dit reduseer tot die integraal 2.2.16 vir $q=1$.

Deur nou gebruik te maak van bostaande integraal volg

dat/ ...

dat

4.2.9 $E\prod_j |L_j|^{h_j} = \Gamma_p((m+n)/2)\prod_j \Gamma_p(m_j/2 + h_j)/(\Gamma_p((m+n)/2 + h)$

$\prod_j \Gamma_p(m_j/2))|\Sigma_1^{-1}\Sigma_2|^{m/2}\, {}_2F_1(m/2 + h, (m+n)/2\,;$

$(m+n)/2 + h\,; I-\Sigma_1^{-1}\Sigma_2), \quad h=\Sigma_j h_j.$

As q=1 reduseer hierdie resultaat tot 2.2.24.

4.3 'n Asimptotiese verdeling vir $\prod_j |L_j|$.

Aangesien die h-de moment van $|I-\Sigma_j L_j|$ (4.2.4) dieselfde is as die van $|I-L|$ (2.2.4), word die asimptotiese verdeling van $|I-\Sigma_j L_j|$ ook gegee in stelling 2.3.2.

Stelling 4.3.1

Indien $A_h \sim W(\Sigma, m_h)$ (h=1,--,q) en $B \sim W(\Sigma, n, \Theta)$, Θ van rang p, word die asimptotiese verdeling van $\prod_h |L_h|$ gegee deur

4.3.1 $P(-\rho\Sigma_h m_h \log|L_h| \leq z^+) = \Sigma_{k=0} P(\chi^2_{f_k} \leq z)P(k) + \mathrm{esp}(-\Theta/2)$

$\Sigma_k \Sigma_K (P(\chi^2_{f_k+2} \leq z) - P(\chi^2_{f_k} \leq z))\omega_{1k} C_K(\Theta/2)/k! + O(m^{-2})$

waar $z^+ = z - \Sigma_h p\rho m_h \log(m_h/2) + p\rho m \log(m/2)$, $m=\Sigma_h m_h$,

$\rho = 1 + (n(n-p-1)/m - (\Sigma_h(1/m_h) - 1/m)(2p^2+3p-1)/6)/((p+1)(q-1)+2n)$,

$\omega_{1k} = (-1/\rho)((1-\rho+n/m)k + (\Sigma_j K_j^2 - \Sigma_j K_j j)/m)$, $f_k = p(q-1)(p+1)/2 + np + 2k$, $P(k) = \mathrm{esp}(-\Theta/2)(sp\Theta)^k/k!$.

Bewys.

Laat $W = ((m/2)^{mp/2}/\prod_h (m_h/2)^{pm_h/2})\prod_h |L_h|^{m_h/2}$ en $M = -2\log W$. Volgens 4.2.3 kan die karakteristieke funksie van ρM geskrywe word

4.3.2 $\phi_{\rho M}(t) = E(W^{-2it\rho}) = ((m/2)^{mp/2}/\prod (m_h/2)^{pm_h/2})^{-2it\rho}$

$E\prod_h |L_h|^{(-2it\rho)m_h/2}$

= / ...

$$= (\Gamma_p((m+n)/2)\prod\Gamma_p(m_h(1-2it\rho)/2)/\Gamma_p(m(1-2it\rho)/2 +n/2)$$

$$\prod_h\Gamma_p(m_h/2))\mathrm{esp}(-\theta/2)\,{}_1F_1((m+n)/2;m(1-2it\rho)/2 +n/2;\ \theta/2)$$

$$= \mathrm{esp}(-\theta/2)\Sigma_k\Sigma_K[((m/2)^{mp/2}/\prod(m_h/2)^{pm_h/2})^{-2it\rho}$$

$$\Gamma_p((m+n)/2,K)\prod_h\Gamma_p(m_h(1-2it\rho)/2)/\Gamma_p(m(1-2it\rho)/2 +n/2,K)\prod_h$$

$$\Gamma_p(m_h/2)]C_K(\theta/2)/k!\ .$$

Die term tussen vierkante hakies is nou van die vorm 2.3.1 met $x_h = m_h/2$, $x = m/2$, $\nu_j = (1-j)/2$, $\gamma_j = n/2 +K_j$. Vervang dus die term met 2.3.2 en ignoreer $O(m^{-2})$. Die karakteristieke funksie word nou

4.3.3 $\phi(t) = \mathrm{esp}(-\theta/2)\Sigma_k\Sigma_K(1-2it)^{-f_k/2}(1+T_{1k}(t))C_K(\theta/2)/k!$
$+ O(m^{-2})$.

Volgens 2.3.3 is

4.3.4 $f_k = \Sigma_j^p((q-1)(1-(1-j))+2(n/2 +K))$
$= p(q-1)(p+1)/2 +np+2k$

en volgens 2.3.4 is $T_{1k}(t) = \omega_{1k}((1-2it)^{-1}-1)$. Die subskrip k word gebruik om die k-de term aan te dui. Volgens 2.3.6 is

4.3.5 $\omega_{1k} = (-1/2\rho)((1-\rho)f_k + n(p(n-p-1)/2 +2k)/m +$
$2(\Sigma_jK_j{}^2-\Sigma_jK_jj)/m - p(\Sigma_h(1/m_h)-1/m)(2p^2+3p-1)/12)$.

Kies ρ sodanig dat $\omega_{10}=0$, d.i.

4.3.6 $\rho = 1 + (n(n-p-1)/m - (\Sigma_h(1/m_h)-1/m)(2p^2+3p-1)/6)/(2n+$
$(p+1)(q-1))$.

ω_{1k} kan derhalwe geskrywe word

4.3.7 $\omega_{1k} = (-1/\rho)((1-\rho+n/m)k + (\Sigma_jK_j{}^2-\Sigma_jK_jj)/m)$.

Omdat $\Sigma_KC_K(\theta/2) = (\mathrm{sp}\theta/2)^k$ en deur $\mathrm{esp}(-\theta/2)(\mathrm{sp}\theta/2)^k = P(k)$ te stel, kan 4.3.3 geskrywe word

4.3.8 $\phi(t)/$ ...

4.3.8 $\phi(t) = \Sigma_k(1-2it)^{-f_k/2}P(k) + esp(\theta/2)\Sigma_k\Sigma_K((1-2it)^{-(f_k+2)/2}$

$-(1-2it)^{-f_k/2})\omega_{1k}C_K(\theta/2)/k! + O(m^{-2})$.

Deur nou die inverse van 4.3.8 te neem, volg

$P(\rho M\leq z) = P(-2\rho\log W\leq z) = P(-\rho pm\log(m/2) + \Sigma_h pm_h\rho\log(m_h/2)$

$-\rho\Sigma_h m_h\log|L_h| \leq z) = P(-\rho\Sigma_h m_h\log|L_h| \leq z^+)$

$= \Sigma_k P(\chi^2_{f_k}\leq z)P(k) + esp(-\theta/2)\Sigma_k\Sigma_K\omega_{1k}$

$(P(\chi^2_{f_k+2}\leq z)-P(\chi^2_{f_k}\leq z))C_K(\theta/2)/k! + O(m^{-2})$

waar z^+ gegee word in die stelling. Dit voltooi die bewys.

Indien θ van rang $r<p$ is, word θ in 4.3.1 vervang deur θ_r. Deur q=1 te neem in 4.3.1 word die resultaat 2.3.10 verkry.

<u>Stelling 4.3.2</u>

Indien $A_h\sim W(\Sigma_1,m_h)$ $(h=1,--,q)$ en $B\sim W(\Sigma_2,n)$ word die asimptotise verdeling van $\prod_h|L_h|$ gegee deur

4.3.9 $P(-\rho\Sigma_h m_h\log|L_h| \leq z^+) = P(\chi^2_f\leq z) + O(m^{-2})$

waar $\rho = 1 + (n-p-1)/2m + 2d/mp - (2p^2+3p-1)(\Sigma_h(1/m_h)-1/m)/12n$,

$d = |\Sigma_1^{-1}\Sigma_2|^{m/2}\Sigma_k\Sigma_K k(m/2)_K C_K(I-\Sigma_1^{-1}\Sigma_2)k!$ en $f = np + p(q-1)(p+1)/2$.

z^+ word gegee in die vorige stelling.

<u>Bewys.</u>

Uit 4.2.9 volg dat die karakteristieke funksie van ρM (sien bewys van stelling 4.3.1 vir definisie van M) geskrywe kan word as

4.3.10 $\phi(t) = |\Sigma_1^{-1}\Sigma_2|^{m/2}\Sigma_k\Sigma_K(m/2)_K g_1(t)g_2(t)C_K(I-\Sigma_1^{-1}\Sigma_2)/k!$

waar

4.3.11 $g_1(t) = ((m/2)^{mp/2}/\prod_h(m_h/2)^{pm_h/2})^{-2it\rho}\Gamma_p(m/2)$

$\prod_h\Gamma_p(m_h(1-2it\rho)/2)/\Gamma_p(m(1-2it\rho)/2)\prod_h\Gamma_p(m_h/2)$

en

4.3.12 $g_2(t)/$ ...

Tabel 3.

VERGELYKING VAN EKSAKTE WAARDES EN CHI-KWADRAAT BENADERING VAN DIE ONDERSKEIDINGSVERMOë-FUNKSIE VAN $|L|$ VIR p=2 EN n=10.

m	50		100		INF	
λ	Exact	χ^2	Exact	χ^2	Exact	χ^2
2	0.0874	0.0841	0.0913	0.0904	0.0961	0.0956
6	.1910	.1808	.2092	.2063	.2319	.2293
10	.3208	.3053	.3574	.3532	.4019	.3970
16	.5257	.5158	.5835	.5813	.6483	.6415
28	.8283	.8472	.8797	.8853	.9240	.9200
40	.9545	.9712	.9765	.9805	.9828	.9889

Tabel 4

VERGELYKING VAN EKSAKTE WAARDES, CHI-KWADRAAT BENADERING, GAMMA-BENADERING EN JACOBI-REEKS BENADERING VAN DIE ONDERSKEIDINGSVERMOë-FUNKSIE VAN $|L|$ VIR p=2 EN n=4.

m=50 λ	Exact	χ^2	Gamma	Jacobi
2	0.1209	0.1196	0.1212	0.1201
10	.5225	.5201	.5033	.5017
m=100				
2	.1257	.1254	.1261	.1244
10	.5545	.5539	.5469	.5388

Stelling 2.3.2

Indien $A \sim W(\Sigma,m)$ en $B \sim W(\Sigma,n,\Theta)$, Θ van rang p, dan word die asimptotiese verdeling van $|I-L|$ gegee deur

2.3.34 $P(-a\log|I-L| \leq z) = P(\chi^2_f \leq z) + O(n^{-2})$

waar $a=n+(m-p-1)/2 + 2d/p$, $d = sp(\Theta/2)$ en $f = mp$.

Bewys.

Stel $V = |I-L|^{n/2}$ en $M = -2\log V$. Die karakteristieke funksie van ρM word dan volgens 2.2.4 gegee deur

2.3.35 $\phi_{\rho M}(t)/$ ...

4.3.12 $g_2(t) = \Gamma_p(m(1-2it\rho)/2,K)\Gamma_p((m+n)/2,K)/(\Gamma_p(m/2,K)$

$\Gamma_p(m(1-2it\rho)/2 + n/2,K)$.

Die voorskrifte 4.3.11 en 4.3.12 is in die vorm 2.3.1. 'n Vergelyking van 4.3.11 met 2.3.1 toon dat $x_h = m_h/2$, $\nu_j=(1-j)/2$, $\gamma_j=0$. Die funksie $g_1(t)$ kan derhalwe geskrywe word

$g_1(t) = (1-2it)^{-f_1/2}(1 + \omega_{11}((1-2it)^{-1}-1)) + O(m^{-2})$

met $f_1=p(q-1)(p+1)/2$ en $\omega_{11}=(-1/2\rho)((1-\rho)f_1-p(\Sigma_h(1/m_h)-1/m)\cdot(2p^2+3p-1)/12)$. Dit blyk dat $g_1(t)$ onafhanklik is van k. 'n Vergelyking van 4.3.12 met 2.3.1 toon dat $x=m/2$, $\gamma_j=n/2$, $\nu_j=(1-j)/2 +K_j$. Die funksie $g_2(t)$ kan derhalwe geskrywe word

$g_2(t) = (1-2it)^{-f_2/2}(1 + \omega_{12}((1-2it)^{-1}-1)) + O(m^{-2})$

met $f_2=np$ en $\omega_{12}=(-1/2\rho)((1-\rho)f_2 + n(np-p^2+4k-p)/2m)$. Dit blyk dat $g_2(t)$ afhanklik is van k. Deur nou die produk $g_1(t)g_2(t)$ van die twee funksies te neem en orde terme $O(m^{-2})$ te ignoreer, word die volgende vekry:

4.3.13 $g_1(t)g_2(t) = (1-2it)^{-f/2}(1 + \omega_{1k}((1-2it)^{-1}-1)) + O(m^{-2})$

waar

4.3.14 $f = f_1+f_2 = np+p(q-1)(p+1)/2$

en

4.3.15 $\omega_{1k} = \omega_{11}+\omega_{12}$

$= (-1/2\rho)((1-\rho)f + n(np-p^2+4k-p)/2m - p(\Sigma_h(1/m_h)$

$-1/m)(2p^2+3p-1)/12$.

Na substitusie van 4.3.13 in 4.3.10 volg

4.3.16 $\phi(t) = (1-2it)^{-f/2} + ((1-2it)^{-(f+2)/2}-(1-2it)^{-f/2})$

$|\Sigma_1{}^{-1}\Sigma_2|^{m/2}\Sigma_k\Sigma_K(m/2)_K\omega_{1k}C_K(I-\Sigma_1{}^{-1}\Sigma_2)/k! + O(m^{-2})$.

Kies ρ sodanig dat $\omega_{1d}=0$ (d enige heelgetal), d.i.

4.3.17 $\rho = 1 + (n-p-1)/2m + 2d/mp - (2p^2+3p-1)(\Sigma_h(1/m_h-1/m)/12n$.

ω_{1k} kan nou geskrywe word

4.3.18 $\omega_{1k}/$ ...

4.3.18 $\omega_{1k} = n(d-k)/m\rho.$

Dit blyk dus dat, indien

4.3.19 $d = |\Sigma_1^{-1}\Sigma_2|^{m/2}\Sigma_k\Sigma_K k(m/2)_K C_K(I-\Sigma_1^{-1}\Sigma_2)/k!,$

die tweede term in 4.3.16 nul is. Die karakteristieke funksie kan derhalwe geskrywe word

4.3.20 $\phi(t) = (1-2it)^{-f/2} + O(m^{-2})$

indien ρ gekies word soos gegee in 4.3.17. Deur nou die inverse van 4.3.20 te neem, volg die stelling.

4.4 Die nie-sentrale meerveranderlike dirichlet-verdeling van die tweede soort.

Stelling 4.4.1

Indien $A_j \sim W(I,m_j)$ $(j=1,--,q)$ en $B \sim W(I,n,\Theta)$, Θ van rang p, word die gesamentlike verdelingsfunksie van V_1, V_2, --, V_q gegee deur

4.4.1 $$f(V_1,--,V_q) = (\Gamma_p((m+n)/2)/\Gamma_p(m/2)\prod_j\Gamma_p(m_j/2))\operatorname{esp}(-\Theta/2)$$
$$\prod_j|V_j|^{(m_j-p-1)/2}|I+\Sigma_jV_j|^{-(m+n)/2}{}_1F_1((m+n)/2\ ;$$
$$n/2\ ;\ \Theta(I+\Sigma_jV_j)^{-1}/2),\quad V_j>0.$$

Bewys.

Die gesamentlike verdeling van A_1, A_2, --, A_q en B is

$$f(A_1,--,A_q,B) = (1/\Gamma_p(n/2)\prod_j\Gamma_p(m_j/2))|2I|^{-(m+n)/2}\operatorname{esp}(-\Theta/2)$$
$$\prod_j|A_j|^{(m_j-p-1)/2}|B|^{(n-p-1)/2}\ \operatorname{esp}(-(\Sigma_jA_j+B)/2)_0F_1(n/2\ ;$$
$$\Theta B/4).$$

Laat $V_j = B^{-1/2}A_jB^{-1/2}$, $J(A_j \to V_j) = |B|^{(p+1)/2}$. Dus $J(A_1,--,A_q \to V_1,--,V_q) = |B|^{q(p+1)/2}$. Die gesamentlike verdelingsfunksie van V_1, --, V_q en B word derhalwe gegee deur

4.4.2 $f(V,--,V_q,B)/$ ...

4.4.2 $f(V_1,\text{--},V_q,B) = (1/\Gamma_p(n/2)\prod_j\Gamma_p(m_j/2))|2I|^{-(m+n)/2}$

$$\mathrm{esp}(-\theta/2)\prod_j|V_j|^{(m_j-p-1)/2}|B|^{(n-p-1)/2}\mathrm{esp}(-(\Sigma_jV_j+I)B/2)$$

$${}_0F_1(n/2\ ;\ \theta B/2),\quad m=\Sigma_jm_j.$$

Integrasie na B met behulp van 1.3.4 lewer die stelling.

Die verdeling 4.4.1 word geklassifiseer as 'n nie-sentrale meerveranderlike dirichlet-verdeling van die tweede soort, d.i. $V_1,\text{--},V_q\sim D_2(m_1/2,\text{--},m_q/2,n/2,\theta/2)$.

Indien $\theta=0$, d.i. die sentrale geval, word die verdeling (Olkin en Rubin (1964))

$$D_2(V_1,\text{--},V_q\ ;\ m_1/2,\text{--},m_q/2,n/2) = \Gamma_p((m+n)/2)/(\Gamma_p(n/2)\prod_j$$
$$\Gamma_p(m_j/2))\prod_j|V_j|^{(m_j-p-1)/2}|I+\Sigma_jV_j|^{-(m+n)/2}.$$

Uit 4.4.1 volg dat

4.4.3 $\int_{V_j>0}\text{--}\int\prod_j|V_j|^{(m_j-p-1)/2}|I+\Sigma_jV_j|^{-(m+n)/2}C_K(\theta(I+\Sigma_jV_j)^{-1}/2)$

$$\prod_j dV_j$$

$$= \Gamma_p(n/2,K)\prod_j\Gamma_p(m_j/2)/(\Gamma_p((m+n)/2,K))C_K(\theta/2).$$

Dus

4.4.4 $E\prod_j|V_j|^{h_j} = \Gamma_p(n/2-h)\prod_j\Gamma_p(m_j/2+h_j)/(\Gamma_p(n/2)$

$$\prod_j\Gamma_p(m_j/2))\mathrm{esp}(-\theta/2)\,{}_1F_1(n/2-h\ ;\ n/2\ ;\theta/2),$$

$h=\Sigma_jh_j$, en

4.4.5 $E|I+\Sigma_jV_j|^{-h} = \Gamma_p(n/2+h)\Gamma_p((m+n)/2)/(\Gamma_p(n/2)\Gamma_p((m+n)/2+h))$

$$\mathrm{esp}(-\theta/2)\,{}_2F_2(n/2+h,(m+n)/2\ ;\ (m+n)/2+h,n/2\ ;\ \theta/2).$$

Laasgenoemde resultaat is dieselfde as die van 3.2.9.

Substitueer in 4.4.3

$$V_j = (I-\Sigma_jL_j)^{-1/2}L_j(I-\Sigma_jL_j)^{-1/2},\quad I+\Sigma_jV_j = (I-\Sigma_jL_j)^{-1}.$$

Die jakobiaan van die transformasie is

$$J(V_1,\text{--},V_q\rightarrow L_1,\text{--},L_q) = |I-\Sigma_jL_j|^{-(p+1)(q+1)/2}$$

wat as volg/ ...

wat as volg bewys kan word: (Sien Anderson (1958), bls. 162)

$$J = \left|\frac{\partial(V_1,--,V_q)}{\partial(L_1,--,L_q)}\right|$$

$$= \frac{D_1(L_1,--,L_q\ ;\ m_1/2,--,m_q/2,n/2)}{D_2(V_1,--,V_q\ ;\ m_1/2,--,m_q/2,n/2)}$$

$$= \frac{\prod_j |L_j|^{(m_j-p-1)/2}|I-\Sigma_j L_j|^{(n-p-1)/2}}{\prod_j |V_j|^{(m_j-p-1)/2}|I+\Sigma_j V_j|^{-(m+n)/2}}$$

$$= |I-\Sigma_j L_j|^{-(p+1)(q+1)/2}.$$

Aangesien $0<L_j<I$ $(j=1,--,q)$ kan 4.4.3 geskrywe word as

4.4.6 $$\int_0^I\!-\!-\!\int \prod_j |L_j|^{(m_j-p-1)/2}|I-\Sigma_j L_j|^{(n-p-1)/2}C_K(\Theta(I-\Sigma_j L_j)/2) \prod_j dL_j$$

$$= \Gamma_p(n/2,K)\prod_j \Gamma_p(m_j/2)/(\Gamma_p((m+n)/2))C_K(\Theta/2)$$

<u>Afleiding 4.4.1</u>

Indien $A_j \sim W(I,m_j)$ $(j=1,--,q)$ en $B \sim W(I,n,\Theta)$, Θ diagonaal en van rang $r<p$, word die gesamentlike verdelingsfunksie van V_1, --, V_q gegee deur

4.4.7 $$f(V_1,--,V_q) = \Gamma_p((m+n)/2)/(\Gamma_p(n/2)\prod_j \Gamma_p(m_j/2))\mathrm{esp}(-\Theta_r/2) \prod_j |V_j|^{(m_j-p-1)/2}|I+\Sigma_j V_j|^{-(m+n)/2}{}_1F_1((m+n)/2\ ;\ n/2\ ;\ \Theta_r(I+N_{1.2})^{-1}/2)$$

waar $N_{1.2} = N_{11}-N_{12}(I+N_{22})^{-1}N_{21}$, N_{11} van orde r, onder die opsplitsing

$$N = \begin{pmatrix} N_{11} & N_{12} \\ N_{21} & N_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Sigma_j V_{11j} & \Sigma_j V_{12j} \\ \Sigma_j V_{21j} & \Sigma_j V_{22j} \end{pmatrix}.$$

<u>Bewys</u>.

Die bewys is soortgelyk as die van 3.2.2.

Die verdeling is 'n nie-sentrale meerveranderlike dirichlet-verdeling van die tweede soort van rang r, d.i.

V_1, --, $V_q \sim D_2(m_1/2,--,m_q/2,n/2,\Theta_r/2)$

indien/ ...

indien Θ van rang r is. Indien r=1, d.i. die lineêre geval, is die verdeling

$$D_2(V_1,--,V_q\ ;\ m_1/2,--,m_q/2,n/2,\lambda/2)$$

$$= \Gamma_p((m+n)/2)/(\Gamma_p(n/2)\prod_j\Gamma_p(m_j/2))e^{-\lambda/2}\prod_j|V_j|^{(m_j-p-1)/2}$$

$$|I+\Sigma_jV_j|^{-(m+n)/2}{}_1F_1((m+n)/2\ ;\ n/2\ ;\ \lambda(1+n_{1.2})^{-1}/2),\ \Theta_1=\lambda,$$

soos gedefinieer deur Troskie (1966).

Die h-de moment van $\prod_j|V_j|$ kan sondermeer uit 4.4.4 herlei word indien Θ van rang r<p is, en is naamlik

4.4.8 $$E\prod_j|V_j|^{h_j} = \Gamma_p(n/2-h)\prod_j\Gamma_p(m_j/2+h_j)/(\Gamma_p(n/2)$$

$$\prod_j\Gamma_p(m_j/2))\mathrm{esp}(-\Theta_r/2)\,{}_1F_1(n/2-h\ ;\ n/2\ ;\ \Theta_r/2)$$

$$= \Gamma_r(n/2-h)\prod_j\Gamma_r(m_j/2+h_j)/(\Gamma_r(n/2)$$

$$\prod_j\Gamma_r(m_j/2))\mathrm{esp}(-\Theta_r/2)\,{}_1F_1(n/2-h\ ;\ n/2\ ;\ \Theta_r/2)$$

$$\prod_{i=r+1}^{p}[\Gamma((n-i+1)/2-h)\prod_j\Gamma((m_j-i+1)/2+h_j)/$$

$$(\Gamma((n-i+1)/2)\prod_j\Gamma((m_j-i+1)/2))$$

$$= E\prod_j|M_j|^{h_j}\cdot\prod_{i=r+1}^{p}E\prod_j y_{ij}^{\ h_j}$$

waar M_1, --, $M_q \sim D_2(m_1/2,--,m_q/2,n/2,\Theta_r/2)$ (M_j van orde r) en $y_{i1},--,y_{iq} \sim D_2((m_1-i+1)/2,--,(m_q-i+1)/2,(n-i+1)/2)$.

Laasgenoemde resultaat volg as gevolg van die feit

$$\Gamma((n-i+1)/2+h)\prod_j\Gamma((m_j-i+1)/2+h_j)/(\Gamma((n-i+1)/2)\prod_j\Gamma((m_j-i+1)/2))$$

$$= \int\!-\,-\!\int_{y_{ij}>0}\prod_j y_{ij}^{\ h_j}\ D_2(y_{i1},--,y_{iq}\ ;\ (m_1-i+1)/2,--,(m_q-i+1)/2,$$

$$(n-i+1)/2)\prod_j dy_{ij}.$$

4.5 Die verdeling van $\Sigma_{j=1}^{q}\mathrm{sp}V_j$.

Stelling 4.5.1

Indien $A_j \sim W(\Sigma,m_j)$ $(j=1,--,q)$ en $B\sim W(\Sigma,n,\Theta)$, Θ van rang p, word die verdelingsfunksie van $\Sigma_j \mathrm{sp}V_j = P$ gegee deur

4.5.1 $$f(P) = \Gamma_p((m+n)/2)/(\Gamma_p(n/2)\Gamma(mp/2))\mathrm{esp}(-\Theta/2)\Sigma_k\Sigma_K\Sigma_j\Sigma_J\Sigma_\delta$$
$$g_{K,J}^{\delta}P^{mp/2+j-1}(-1)^j(m/2)_J((m+n)/2)_\delta C_K(\Theta/2)C_\delta(I_p)$$
$$((mp/2)_j(n/2)_K C_K(I_p)k!j!)^{-1}, \quad P>0,$$

waar $m=\Sigma_{j=1}^{q}m_j$.

Bewys.

Aangesien $\mathrm{sp}V_j$ invariant is ten opsigte van die transformasies $A_j\to\Sigma^{1/2}A_j\Sigma^{1/2}$ en $B\to\Sigma^{1/2}B\Sigma^{1/2}$, beskou $\Sigma=I$. Volgens 4.4.2 kan die Laplace-getransformeerde funksie geskrywe word

$$g(t) = E(\mathrm{esp}(-t\Sigma_j V_j))$$
$$= \mathrm{esp}(-\Theta/2)(1/(\Gamma_p(n/2)\textstyle\prod_j\Gamma_p(m_j/2)|2I_p|^{+(m+n)/2}))\int_{\overline{V_j>0}}\int$$
$$\int_{B>0}\textstyle\prod_j|V_j|^{(m_j-p-1)/2}|B|^{(m+n-p-1)/2}\mathrm{esp}(-B/2)$$
$$\mathrm{esp}(-(\tfrac{1}{2}B+tI)\Sigma_jV_j)\,{}_0F_1(n/2\,;\,\Theta B/4)dB\textstyle\prod_j dV_j.$$

Integreer agtereenvolgens na V_1, V_2, --, V_q met behulp van 1.3.2. Dus

$$g(t) = \mathrm{esp}(-\Theta/2)/(\Gamma_p(n/2)|2I|^{(m+n)/2})\int_{B>0}\mathrm{esp}(-B/2)|B|^{(m+n-p-1)/2}$$
$$|\tfrac{1}{2}B+tI|^{-m/2}\,{}_0F_1(n/2\,;\,\Theta B/4)dB.$$

Volgens 1.2.11 is

$$|\tfrac{1}{2}B+tI|^{-m/2} = t^{-mp/2}\Sigma_{j=0}^{\infty}\Sigma_J(-B/2t)$$

en deur nou term-vir-term na B te integreer volgens 3.4.1, volg

4.5.2 g(t)=/ ...

4.5.2 $g(t) = \Gamma_p((m+n)/2)\mathrm{esp}(-\theta/2)/(\Gamma_p(n/2))\Sigma_k\Sigma_K\Sigma_j\Sigma_J\Sigma_\delta g_{K,J}^{\delta}$

$$t^{-(mp/2\ +j)}(-1)^j(m/2)_J((m+n)/2)_\delta C_K(\theta/2)C_\delta(I_p)$$

$$((n/2)_K C_K(I_p)k!j!)^{-1}.$$

Dit is dieselfde funksie soos gegee in 3.4.6. Deur dus die Laplace-inverse te neem, volg die stelling.

Die volgende gevolgtrekking kan derhalwe gemaak word indien 4.5.1 met 3.4.3 vergelyk word:

As $f(\mathrm{sp}V_i) = \Gamma_p((m_i+n)/2)/(\Gamma_p(n/2)\Gamma(m_ip/2))\mathrm{esp}(-\theta/2)\Sigma_k\Sigma_K\Sigma_j\Sigma_J\Sigma_\delta$

$$g_{K,J}^{\delta}(\mathrm{sp}V_i)^{m_ip/2\ +j-1}(-1)^j(m_i/2)_J((m+n)/2)_\delta C_K(\theta/2)$$

$$C_\delta(I_p)/((n/2)_K(m_ip/2)_jC_K(I_p)k!j!),$$

dan is

$f(\Sigma_{i=1}^{q}\mathrm{sp}V_i) = \Gamma_p((m+n)/2)/(\Gamma_p(n/2)\Gamma(mp/2))\mathrm{esp}(-\theta/2)\Sigma_k\Sigma_K\Sigma_j\Sigma_J\Sigma_\delta$

$$g_{K,J}^{\delta}(\mathrm{sp}\Sigma_{i=1}^{q}V_i)^{mp/2\ +j-1}(-1)^j(m/2)_J((m+n)/2)_\delta$$

$$C_K(\theta/2)C_\delta(I_p)/((n/2)_K(mp/2)_jC_K(I_p)k!j!)$$

waar $m=\Sigma_{i=1}^{q}m_i$.

B <u>Komplekse veranderlikes.</u>

HOOFSTUK V.

DIE KOMPLEKSE NIE-SENTRALE MEERVERANDERLIKE BETA-VERDELING VAN DIE EERSTE SOORT.

5.1 Inleiding.

In hierdie hoofstuk word soortgelyk as in hoofstuk II te werk gegaan behalwe dat alle veranderlikes nou as komplekse veranderlikes beskou word.

Beskou dus die statistiek

$$L = (A+B)^{-1/2}A(A+B)^{-1/2}$$

waar $L = L_R + iL_I$, d.i. L is 'n komplekse veranderlike met reële deel L_R en imaginêre deel L_I. Omdat A en B as komplekse Wishart-veranderlikes beskou word (sien paragraaf 1.3), beteken dit dat L Hermities positief definiet is. Derhalwe is $L = \bar{L}'$ waar $\bar{L} = L_R - iL_I$ die toegevoegde van L is en L_I 'n skeef-simmetriese matriks is. Die diagonaal elemente van L (of L_r) is positief. Dit word verder veronderstel dat indien $A+B = S\bar{S}'$, dan is $(A+B)^{1/2} = S$ waar S onderdriehoekig is met s_{jj} reëel, >0, j=1,--,p en $s_{ij} = s_{ijR} - is_{ijI}$. Dit word ook veronderstel dat

$$(A+B)^{-1/2}A(\overline{(A+B)^{-1/2}})' = (A+B)^{-1/2}A(A+B)^{-1/2}.$$

Die verdeling van L word in hierdie hoofstuk ondersoek in die volgende gevalle:

(i) $A \sim CW(\Sigma,m)$ en $B \sim CW(\Sigma,n,\Theta)$

(ii) $A \sim CW(\Sigma,m,\Theta)$ en $B \sim CW(\Sigma,n)$

(iii) $A \sim CW(\Sigma_1,m)$ en $B \sim CW(\Sigma_2,m)$.

In paragraaf 5.2 word die verdeling van L afgelei in elk van die drie gevalle en waar die nie-sentrale parameter Θ as van rang $r \leq p$ beskou word. Asimptotiese verdelings vir $|L|$ en $|I-L|$ word in elk van die drie gevalle gevind in 5.3 en in

5.4 word die verdeling van die grootste karakteristieke wortel van L gedefinieer. In 5.5 word aangetoon dat indien $r<p$, die verdeling van L geskrywe kan word as die produk van onafhanklike beta-verdelings van die eerste soort.

5.2 Die verdeling van L.

Stelling 5.2.1

Indien $A \sim CW(\Sigma,m)$ en $B \sim CW(\Sigma,n,\Theta)$, Θ van rang p, word die verdelingsfunksie van L gegee deur

5.2.1 $$C\beta_1(L\ ;\ m,n,\Theta) = (1/\Gamma_p(m)\Gamma_p(n))|\Sigma|^{-(m+n)}\mathrm{esp}(-\Theta)|L|^{m-p}$$
$$|I-L|^{n-p}\int_{T=\bar{T}'>0}\mathrm{esp}(-\Sigma^{-1}T)|T|^{m+n-p}{}_0\bar{F}_1(n\ ;$$
$$\Theta\Sigma^{-1}T^{1/2}(I-L)T^{1/2})dT, \quad 0<L=\bar{L}'<I.$$

Bewys.

Stel $L = T^{-1/2}AT^{-1/2}$, $T = A+B$, in die gesamentlike verdeling van A en B (sien 1.3.5 en 1.3.7). Die jakobiaan van die transformasie kan maklik aangetoon word as (sien Khatri (1965))

$$J(A,B\rightarrow L,T) = |T|^p.$$

Integrasie na T lewer die stelling. Na analogie van die verdeling in die reële geval, is hierdie verdeling 'n komplekse nie-sentrale meerveranderlike beta-verdeling van die eerste soort van volle rang.

Met behulp van die integraal (sien 6.2.4 vir die bewys van die integraal)

5.2.1 $$\int_0^I|L|^{a-p}|I-L|^{b-p}\ \bar{C}_K(R(I-L))dL$$
$$= \bar{\Gamma}_p(a)\bar{\Gamma}_p(b,K)\bar{C}_K(R)/\bar{\Gamma}_p(a+b,K)$$

en die integraal 1.3.8 volg uit 5.2.1 dat

5.2.2 $$E|L|^h = \Gamma_p(m+h)\Gamma_p(m+n)/(\Gamma_p(m)\Gamma_p(m+n+h))\,\mathrm{esp}(-\Theta)$$
$${}_1\bar{F}_1(m+n\ ;\ m+n+h\ ;\ \Theta)$$

en / ...

5.2.3 $E|I-L|^h = \Gamma_p(n+h)\Gamma_p(m+n)/(\Gamma_p(n)\Gamma_p(m+n+h))\mathrm{esp}(-\Theta)$

$${}_2\overline{F}_2(m+n,n+h\ ;\ m+n+h,n\ ;\ \Theta)$$

Afleiding 5.2.1

Indien $A\sim CW(I,m)$ en $B\sim CW(I,n,\Theta)$, Θ diagonaal en van rang $r<p$, word die verdelingsfunksie van L gegee deur

5.2.4 $C\beta_1(L\ ;\ m,n,\Theta_r) = \Gamma_p(n+m)/(\Gamma_p(m)\overline{\Gamma}_p(n)\overline{\Gamma}_r(m+n))\mathrm{esp}(-\Theta_r)$

$$|L|^{m-p}|I-L|^{n-p}\int_{T_{11}=\overline{T}'_{11}>0}\mathrm{esp}(-T_{11})|T_{11}|^{m+n-r}$$

$${}_0\overline{F}_1(n\ ;\ \Theta_r T_{11}{}^{1/2}(I-L_{11})T_{11}{}^{1/2})dT_{11},\quad 0<L<I.$$

Bewys.

Indien $\Theta = \Sigma^{-1}M\overline{M}'$, soos gedefinieer in 1.3.7, van rang $r<p$ is, bestaan 'n nie-singuliere F sodanig dat $F\Sigma\overline{F}' = I$ en $FM\overline{M}' = \begin{pmatrix}\Theta_r & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$. Die Wishart-verdelings soos beskou in stelling 5.2.1 kan derhalwe na kanoniese vorme getransformeer word met behulp van die transformasies $A\to\overline{F}'AF$ en $B\to\overline{F}'BF$, d.i. die verdelings soos dit beskou word in hierdie afleiding. Die verdeling van L is nie invariant ten opsigte van hierdie transformasies nie terwyl $|L|$ en $|I-L|$ wel is. Laat $T = \begin{pmatrix}T_{11} & 0\\ T_{21} & T_{22}\end{pmatrix}$ en $L = \begin{pmatrix}L_{11} & L_{12}\\ L_{21} & L_{22}\end{pmatrix}$ sodanig dat T_{11} en L_{11} van van orde r is. Onder bogenoemde voorwaardes kan 5.2.1 dus geskrywe word

5.2.5 $C\beta_1(L\ ;\ m,n,\Theta_r) = (1/\overline{\Gamma}_p(m)\overline{\Gamma}_p(n))\mathrm{esp}(-\Theta_r)|L|^{m-p}|I-L|^{n-p}$

$$\int_{T>0}\mathrm{esp}(-T)|T|^{m+n-p}{}_0\overline{F}_1(n\ ;\ \Theta_r T_{11}{}^{1/2}(I-L_{11})T_{11}{}^{1/2})$$

$$dT.$$

Omdat $\int_{T>0}\mathrm{esp}(-T)|T|^{m+n-p}dT_{21}dT_{22}$

$$= \overline{\Gamma}_p(m+n)/(\overline{\Gamma}_r(m+n))\ |T_{11}|^{m+n-r}\mathrm{esp}(-T_{11})$$

volg/ ...

volg die afleiding. Die verdeling 5.2.4 is 'n komplekse nie-sentrale meerveranderlike beta-verdeling van die eerste soort van rang r.

Deur gebruik te maak van 1.2.10 kan die volgende momente uit 5.2.2 en 5.2.3 respektiewelik herlei word indien Θ van rang r is:

5.2.6 $$E|L|^h = \bar{\Gamma}_p(m+h)\bar{\Gamma}_p(m+n)/(\bar{\Gamma}_p(m)\bar{\Gamma}_p(m+n+h))\mathrm{esp}(-\Theta_r)$$

$$ {}_1\bar{F}_1(m+n\ ;\ m+n+h\ ;\ \Theta_r)$$

en

5.2.7 $$E|I-L|^h = \bar{\Gamma}_p(m+n)\bar{\Gamma}_p(n+h)/(\bar{\Gamma}_p(n)\bar{\Gamma}_p(m+n+h))\mathrm{esp}(-\Theta_r)$$

$$ {}_2\bar{F}_2(m+n,n+h\ ;\ m+n+h,n\ ;\ \Theta_r).$$

<u>Stelling 5.2.2</u>

Indien $A\sim CW(\Sigma,m,\Theta)$ en $B\sim CW(\Sigma,n)$, Θ van rang p, word die verdelingsfunksie van L gegee deur

5.2.8 $$C\beta_1(L\ ;\ m,n,\Theta) = (1/\bar{\Gamma}_p(m)\bar{\Gamma}_p(n))|\Sigma|^{-(m+n)}\mathrm{esp}(-\Theta)$$

$$|L|^{m-p}|I-L|^{n-p}\int_{T>0}\mathrm{esp}(-\Sigma^{-1}T)|T|^{m+n-p}$$

$$ {}_0\bar{F}_1(m\ ;\ \Theta\Sigma^{-1}T^{1/2}LT^{1/2})dT,\quad 0<L<I.$$

<u>Bewys.</u>

Die bewys is soortgelyk as die van stelling 5.2.1. Die verdeling is ook 'n komplekse nie-sentrale meerveranderlike beta-verdeling van die eerste soort van volle rang.

Die integraal 5.2.1 kan ook geskrywe word

5.2.9 $$\int_0^I|L|^{b-p}|I-L|^{a-p}\bar{C}_K(RL)dL$$

$$= \bar{\Gamma}_p(b,K)\bar{\Gamma}_p(a)/\bar{\Gamma}_p(a+b,K)\ \bar{C}_K(R),$$

dus, uit 5.2.8

5.2.10 $$E|L|^h = \bar{\Gamma}_p(m+h)\bar{\Gamma}_p(m+n)/(\bar{\Gamma}_p(m)\bar{\Gamma}_p(m+n+h))\mathrm{esp}(-\Theta)$$

$$ {}_2\bar{F}_2(m+n,m+h\ ;\ m,m+n+h\ ;\ \Theta),$$

5.2.11/ ...

5.2.11 $$E|I-L|^h = \bar{\Gamma}_p(n+h)\bar{\Gamma}_p(m+n)/(\bar{\Gamma}_p(n)\bar{\Gamma}_p(m+n+h))\mathrm{esp}(-\Theta)$$

$$ {}_1\bar{F}_1(m+n\ ;\ m+n+h\ ;\ \Theta).$$

Afleiding 5.2.2

Indien $A\sim CW(I,m,\Theta)$ en $B\sim CW(I,n)$, Θ diagonaal en van rang $r<p$, word die verdelingsfunksie van L gegee deur

5.2.12 $$C\beta_1(L\ ;\ m,n,\Theta_r) = \bar{\Gamma}_p(m+n)/(\bar{\Gamma}_p(m)\bar{\Gamma}_p(n)\bar{\Gamma}_r(m+n))\mathrm{esp}(-\Theta_r)$$

$$|L|^{m-p}|I-L|^{n-p}\int_{T_{11}>0}\mathrm{esp}(-T_{11})|T_{11}|^{m+n-r}$$

$$ {}_0\bar{F}_1(m\ ;\ \Theta_r T_{11}{}^{1/2}L_{11}T_{11}{}^{1/2})dT_{11}.$$

Bewys.

Die bewys is soortgelyk as die van afleiding 5.2.1. Die verdeling is 'n komplekse nie-sentrale meerveranderlike beta-verdeling van die eerste soort van rang r.

In hierdie geval is

5.2.13 $$E|L|^h = \bar{\Gamma}_p(m+n)\bar{\Gamma}_p(m+h)/(\bar{\Gamma}_p(m)\bar{\Gamma}_p(m+n+h))\mathrm{esp}(-\Theta_r)$$

$$ {}_2\bar{F}_2(m+n,m+h\ ;\ m,m+n+h\ ;\ \Theta_r)$$

en

5.2.14 $$E|I-L|^h = \bar{\Gamma}_p(n+h)\bar{\Gamma}_p(m+n)/(\bar{\Gamma}_p(n)\bar{\Gamma}_p(m+n+h))\mathrm{esp}(-\Theta_r)$$

$$ {}_1\bar{F}_1(m+n\ ;\ m+n+h\ ;\ \Theta_r)$$

Stelling 5.2.3

Indien $A\sim CW(\Sigma_1,m)$ en $B\sim CW(\Sigma_2,n)$ word die verdelingsfunksie van L gegee deur

5.2.15 $$f(L) = (1/\bar{\Gamma}_p(m)\bar{\Gamma}_p(n))|\Sigma_1|^{-m}|\Sigma_2|^{-n}|L|^{m-p}|I-L|^{n-p}$$

$$\int_{T>0}\mathrm{esp}(-\Sigma_2{}^{-1}T)|T|^{m+n-p}{}_0\bar{F}_0(-T^{1/2}(\Sigma_1{}^{-1}-\Sigma_2{}^{-1})T^{1/2}L)\ dT.$$

Bewys.

Die bewys is voor die hand liggend na aanleiding van die bewys van 2.2.22. Die verdeling word ook geklassifiseer as

'n komplekse/ ...

'n komplekse nie-sentrale meerveranderlike beta-verdeling van die eerste soort.

In hierdie geval is

$$5.2.16 \quad E|L|^h = \bar{\Gamma}_p(m+n)\bar{\Gamma}_p(m+h)/(\bar{\Gamma}_p(m)\bar{\Gamma}_p(m+n+h))|\Sigma_1{}^{-1}\Sigma_2|^m$$

$$_2\bar{F}_1(m+n,m+h\ ;\ m+n+h\ ;\ I-\Sigma_1{}^{-1}\Sigma_2)$$

en

$$5.2.17 \quad E|I-L|^h = \bar{\Gamma}_p(m+n)\bar{\Gamma}_p(n+h)/(\bar{\Gamma}_p(n)\bar{\Gamma}_p(m+n+h))|\Sigma_1{}^{-1}\Sigma_2|^m$$

$$_2\bar{F}_1(m,m+n\ ;\ m+n+h\ ;\ I-\Sigma_1{}^{-1}\Sigma_2)$$

Deur h=0 te neem in enige van hierdie momente, volg die resultaat 1.2.21, naamlik

$$_1\bar{F}_0(m\ ;\ I-S) = |S|^{-m}.$$

5.3 <u>Asimptotiese verdelings vir $|L|$ en $|I-L|$</u>.

<u>Stelling 5.3.1</u>

Indien $A \sim CW(\Sigma,m)$ en $B \sim CW(\Sigma,n,\Theta)$, Θ van rang $r \leq p$, word die asimptotiese verdeling van $|L|$ gegee deur

$$5.3.1 \quad P(-a\log|L| \leq z) = \Sigma_{k=0}^{\infty} P(\chi^2_{f_k} \leq z)P(k) + \mathrm{esp}(-\theta_r)\Sigma_k\Sigma_K\omega_{1k}$$

$$(P(\chi^2_{f_k+2} \leq z) - P(\chi^2_{f_k} \leq z))\bar{C}_K(\Theta_r)/k! + O(m^{-2})$$

waar $a=2\rho m$, $\rho=1 + (n-p)/2m$, $f_k=2(np+k)$, $P(k) = \mathrm{esp}(-\theta_r)(\mathrm{sp}\Theta_r)^k/k!$ en $\omega_{1k} = (-1/\rho)((1-\rho+(2n+1)/2m)k + (\Sigma_j K_j{}^2 - 2\Sigma_j K_j j)/2m$.

<u>Bewys</u>.

Stel $W = |L|^m$ en $M = -2\log W$. Die karakteristieke funksie van ρM kan dus uit 5.2.2 geskrywe word as

$$5.3.2 \quad \phi_{\rho M}(t) = E|L|^{-2it\rho m}$$

$$= \bar{\Gamma}_p(m(1-2it\rho))\bar{\Gamma}_p(m+n)/(\bar{\Gamma}_p(m)\bar{\Gamma}_p(m(1-2it\rho)+n))$$

$$\mathrm{esp}(-\Theta)\Sigma_k\Sigma_K[m+n]_K\bar{C}_K(\Theta)/([m(1-2it\rho)+n]_K k!)$$

=/ ...

$$= \mathrm{esp}(-\Theta)\Sigma_k\Sigma_K[\bar{\Gamma}_p(m+n,K)\bar{\Gamma}_p(m(1-2it\rho))/(\bar{\Gamma}_p(m)$$

$$\bar{\Gamma}_p(m(1-2it\rho)+n,K)]\bar{C}_K(\Theta)/k!.$$

Die term tussen vierkante hakies kan in die vorm 2.3.7 geskrywe word met $x = m$, $\nu_j = 1-j$ en $\gamma_j = n + K_j$. Deur nou soortgelyk as in die bewys van stelling 2.3.1 te werk te gaan, volg die stelling vir die geval Θ van rang p. Die waarde van ρ is gevind deur in

5.3.3 $\omega_{1k} = (-1/\rho)((1-\rho)f_k + n(p(n-p)+2k)/m + (\Sigma_j K_j^2-\Sigma_j K_j j)/m),$

$\omega_{10}=0$ te stel en vir ρ op te los. Om aan te toon dat die stelling ook geld indien Θ van rang $r<p$ is, is dit slegs nodig om van 1.2.10 gebruik te maak. Dit dien net daarop gelet te word dat

$$\Sigma_K\bar{C}_K(\Theta) = (\mathrm{sp}\Theta)^k.$$

Stelling 5.3.2

Indien $A\sim CW(\Sigma,m)$ en $B\sim CW(\Sigma,n,\Theta)$, Θ van rang $r\leq p$, word die asimptotiese verdeling van $|I-L|$ gegee deur

5.3.4 $P(-a\log|I-L| \leq z) = P(\chi_f^2\leq z) + O(n^{-2})$

waar $a = 2n + m - p + 2d/p$, $f = 2mp$ en $d = \mathrm{sp}\Theta_r$.

Bewys.

Stel $V = |I-L|^n$ en $M = -2\log V$. Uit 5.2.3 volg die karakteristieke funksie van ρM as

5.3.5 $\phi_{\rho M}(t) = E|I-L|^{-2it\rho n}$

$$= \mathrm{esp}(-\Theta)\Sigma_k\Sigma_K[\bar{\Gamma}_p(m+n,K)\bar{\Gamma}_p(n(1-2it\rho),K)/(\bar{\Gamma}_p(n.K)$$

$$\bar{\Gamma}_p(n(1-2it\rho)+m,K)]\bar{C}_K(\Theta)/k!\ .$$

Die term tussen vierkante hakies is van die vorm 2.3.7 met $x = n$, $\nu_j = 1-j+K_j$ en $\gamma_j = m$. Derhalwe is $f = 2mp$ en

5.3.6 $\omega_{1k} = (-1/2\rho)(mp(m-p)/n + 2km/n + (1-\rho)f).$

Stel/ ...

Stel $\omega_{1d}=0$ (d enige heelgetal) en los op vir ρ. Dus

5.3.7 $\rho = 1 + (m-p)/2n + d/np.$

ω_{1k} kan derhalwe geskrywe word

5.3.8 $\omega_{1k} = 2m(d-k)/a$

waar $a = 2\rho n$. Pas nou die prosedure soos in die bewys van 2.3.2 op 5.3.5 toe en die stelling is bewys vir die geval Θ van rang p. Indien Θ van rang $r<p$ is, volg die stelling sonderneer.

Die geval $A \sim CW(\Sigma,m,\Theta)$ en $B \sim CW(\Sigma,n)$ lewer soortgelyke resulatate as voorgaande. m en n word net deurgaans omgeruil (sien 5.2.10 en 5.2.11).

Stelling 5.3.3

Indien $A \sim CW(\Sigma_1,m)$ en $B \sim CW(\Sigma_2,n)$ word die asimptotiese verdeling van $|L|$ gegee deur

5.3.9 $$P(-a\log|L| \leq z) = P(\chi^2_f \leq z) + (P(\chi^2_{f+2} \leq z) - P(\chi^2_f \leq z))|\Sigma_1^{-1}\Sigma_2|^m$$

$$\Sigma_k \Sigma_K \omega_{1k} [m]_K \bar{C}_K (I - \Sigma_1^{-1}\Sigma_2)/k! + O(m^{-2})$$

waar $a = 2m\rho$, $f = 2np$, $\rho = 1 + (n-p)/2m$, $\omega_{1k} = (-1/2\rho)(np(n-p)/m + 2kn/m + (1-\rho)f)$.

Bewys.

Laat $W = |L|^m$ en $M = -2\log W$. Volgens 5.2.16 word die karakteristieke funksie van ρM gegee deur

5.3.10 $$\phi_{\rho M}(t) = |\Sigma_1^{-1}\Sigma_2|^m \Sigma_k \Sigma_K [m]_K [\bar{\Gamma}_p(m+n,K)\bar{\Gamma}_p(m(1-2it\rho),K)/$$

$$(\bar{\Gamma}_p(m,K)\bar{\Gamma}_p(m(1-2it\rho)+n,K))]\bar{C}_K(\Theta)/k!.$$

Die term tussen vierkante hakies is van die vorm 2.3.7 met $x = m$, $\nu_j = 1-j+K_j$ en $\gamma_j = n$. Dus $f = 2np$ en

5.3.11 $\omega_{1k} = (-/2\rho)(np(n-p)/m + 2kn/m + (1-\rho)f).$

Laat $\omega_{10} = 0$ en los op vir ρ, d.i. $\rho = 1 + (n-p)/2m$.

Pas die prosedure soos in die bewys van stelling 2.3.5 op

5.3.10 toe/ ...

5.3.10 toe en die stelling volg.

Stelling 5.3.4

Indien $A \sim CW(\Sigma_1, m)$ en $B \sim CW(\Sigma_2, n)$ word die asimptotiese verdeling van $|I-L|$ gegee deur

$$5.3.12 \quad P(-a\log|I-L| \leq z) = |\Sigma_1^{-1}\Sigma_2|^m \Sigma_k \Sigma_K P(\chi^2_{f_k} \leq z)[m]_K \bar{C}_K(I-\Sigma_1^{-1}\Sigma_2)/k!$$
$$+ |\Sigma_1^{-1}\Sigma_2|^m \Sigma_k \Sigma_K (P(\chi^2_{f_k+2} \leq z) - P(\chi^2_{f_k} \leq z))[m]_K \omega_{1k}$$
$$\bar{C}_K(I-\Sigma_1^{-1}\Sigma_2)/k! + O(n^{-2})$$

waar $a = 2n\rho$, $\rho = 1 + (m-p)/2n$, $f_k = 2(mp+k)$,
$\omega_{1k} = (-1/\rho)((1-\rho+m/n)k + (\Sigma_j K_j^2 - 2\Sigma_j K_j j + k)/n)$.

Bewys.

Onder die substitusie $V = |I-L|^n$, $M = -2\log V$, volg uit 5.2.17 dat die karakteristieke funksie van ρM gegee word deur

$$\phi(t) = E|I-L|^{-2it\rho n}$$
$$= |\Sigma_1^{-1}\Sigma_2|^m \Sigma_k \Sigma_K [m]_K [\bar{\Gamma}_p(m+n,K)\bar{\Gamma}_p(n(1-2it\rho))/(\bar{\Gamma}_p(n)$$
$$\bar{\Gamma}_p(n(1-2it\rho) + m,K)]\bar{C}_K(I-\Sigma_1^{-1}\Sigma_2)/k!.$$

Dus $x = n$, $\nu_j = 1-j$ en $\gamma_j = m + K_j$. $f_k = 2(mp+k)$ en
$\omega_{1k} = (-1/\rho)((1-\rho)f_k + m(p(m-p)+2k)/n + (\Sigma_j K_j^2 - 2\Sigma_j K_j j)/n)$.
Stel $\omega_{10}=0$ en los op vir ρ. Vervang die term in vierkante hakies deur 2.3.2 en neem die inverse.

5.4 Die verdeling van die grootste karakteristieke wortel van L.

Die gesamentlike verdeling van die karakteristieke wortels van L sal eers gedefinieer word waaruit die verdeling van die grootste karakteristieke wortel herlei kan word.

Stelling 5.4.1

Indien $A \sim CW(\Sigma, m\Sigma$ en $B \sim CW(\Sigma, n, \Theta)$, Θ van rang p, word die gesamentlike verdelingsfunksie van die karakteristieke wortels l_1, l_2, --, l_p $(1<l_1<--<l_p<0)$ van L gegee deur

5.4.1/ ...

5.4.1 $f(\Delta) = \pi^{p(p-1)}\bar{\Gamma}_p(m+n)/(\bar{\Gamma}_p(p)\bar{\Gamma}_p(m)\bar{\Gamma}_p(n))\mathrm{esp}(-\Theta)|\Delta|^{m-p}$

$$|I-\Delta|^{n-p}\,\bar{\alpha}_p(\Delta)\,{}_1\bar{F}_1(m+n\ ;\ n\ ;\ \Theta, I-\Delta)$$

waar $\Delta = \mathrm{diag}(l_1,--,l_p)$ en $\bar{\alpha}_p(\Delta) = \prod_{i<j}(l_i-l_j)^2$.

Bewys.

Daar bestaan 'n unitêre matriks U sodanig dat

$$\bar{U}'LU = \Delta \quad (\Delta \text{ reëel}).$$

Die differensiaal dL is (James (1964))

$$dL = \bar{\alpha}_p(\Delta)d\Delta dL.$$

Substitueer dus $L = U\Delta\bar{U}'$ in 5.2.1 en integreer na U 'n element van die unitêre groep U(p) deur gebruik te maak van 1.2.18 en 1.2.19. Dus

$$f(\Delta) = \pi^{p(p-1)}(1/\bar{\Gamma}_p(p)\bar{\Gamma}_p(m)\bar{\Gamma}_p(n))|\Sigma|^{-(m+n)}\mathrm{esp}(-\Theta)|\Delta|^{m-p}$$

$$|I-\Delta|^{n-p}\,\bar{\alpha}_p(\Delta)\int_{T>0}\mathrm{esp}(-\Sigma^{-1}T)|T|^{m+n-p}\,{}_0\bar{F}_1(n\ ;\ \Theta\Sigma^{-1}T, I-\Delta)dT.$$

Integrasie na T volgens 1.3.8 lewer die stelling.

Afleiding 5.4.1

Indien Δ verdeel is soos in 5.4.1 word die verdelingsfunksie van die grootste karakteristieke wortel l_1 gedefinieer as

5.4.2 $f(l_1) = \bar{\Gamma}_p(m+n)\bar{\Gamma}_p(p)/(\bar{\Gamma}_p(n)\bar{\Gamma}_p(m+p))\mathrm{esp}(-\Theta)\Sigma_k\Sigma_K\Sigma_j\Sigma_J\Sigma_{\tau\leq K}\Sigma_\delta$

$$a_\tau g_{\tau,J}^{\delta}\ l_1^{mp+j+t-1}(mp+t+j)[m+n]_K[p-n]_J[m]_\delta/($$

$$[n]_K[m+p]_\delta)\bar{C}_K(\Theta)\bar{C}_\delta(I_p)/(\bar{C}_K(I_p)k!j!),\ 0<l_1<1.$$

Bewys.

Laat $x_{i-1} = l_i/l_1$, $X = \mathrm{diag}(x_1,--,x_{p-1})$ en $X^1 = \mathrm{diag}(1,x_1,--,x_{p-1})$ in 5.4.1. Die jakobiaan van die transformasie is $J(\Delta\to l_1,X) = l_1^{p-1}$. Onder die transformasie is

$$|\Delta| = l_1^{p}|X|,$$

$\bar{\alpha}_p(\Delta)$ =/ ...

$$\bar{\alpha}_p(\Delta) = l_1^{p(p-1)}|I-X|^2\bar{\alpha}_{p-1}(X)$$

$$|I-\Delta|^{n-p} = {}_1\bar{F}_0(p-n\ ;\ \Delta) \quad (1.2.21)$$

$$= \Sigma_j\Sigma_J[p-n]_J\bar{C}_J(l_1X^1)/j!.$$

Omdat $\bar{C}_K(I-\Delta) = C_K(I-\Delta)$, want die elemente van Δ is reëel, kan dus ook geskrywe word (James (1964))

$$\bar{C}_K(I-\Delta) = \Sigma_{\tau\leq K}a_\tau\bar{C}_\tau(l_1X^1).$$

Die gesamentlike verdelingsfunksie van l_1 en X kan derhalwe geskrywe word

5.4.3 $$f(l_1,X) = \pi^{p(p-1)}\bar{\Gamma}_p(m+n)/(\bar{\Gamma}_p(p)\bar{\Gamma}_p(m)\bar{\Gamma}_p(n))\mathrm{esp}(-\Theta)|X|^{m-p}$$
$$|I-X|^2\bar{\alpha}_{p-1}(X)\Sigma_k\Sigma_K\Sigma_j\Sigma_J\Sigma_{\tau\leq K}a_\tau l_1^{mp+j+t-1}[m+n]_K$$
$$[p-n]_J\bar{C}_K(\Theta)\bar{C}_J(X^1)\bar{C}_\tau(X^1)/([n]_K\bar{C}_K(I_p)k!j!),$$
$$0<l_1<1,\ 0<X<I.$$

Integreer na X, d.i. naamlik die integraal

5.4.4 $$\int_0^I|X|^{m-p}|I-X|^2\bar{\alpha}_{p-1}(X)\bar{C}_J(X^1)\bar{C}_\tau(X^1)dX$$
$$= \Sigma_\delta g_{\tau,J}^{\ \delta}\int_0^I|X|^{m-p}|I-X|^2\bar{\alpha}_{p-1}(X)\bar{C}_\delta(X^1)dX$$
$$= \Sigma_\delta g_{\tau,J}^{\ \delta}(mp+t+j)\bar{\Gamma}_p(p)\bar{\Gamma}_p(p)\bar{\Gamma}_p(m,\delta)\bar{C}_\delta(I_p)/(\pi^{p(p-1)}\bar{\Gamma}_p(m+p,\delta))$$

omdat

5.4.5 $$\int_0^I|X|^{m-p}|I-X|^2\bar{\alpha}_{p-1}(X)\bar{C}_\delta(X^1)dX$$
$$= (mp+t+j)\bar{\Gamma}_p(p)\bar{\Gamma}_p(p)\bar{\Gamma}_p(m,\delta)\bar{C}_\delta(I_p)/(\pi^{p(p-1)}\bar{\Gamma}_p(m+p,\delta)).$$

Laasgenoemde integraal kan as volg aangetoon word:

Uit 5.2.9 volg

5.4.5 $$\int_0^I|L|^{m-p}\bar{C}_K(L)dL = \bar{\Gamma}_p(m,K)\bar{\Gamma}_p(p)\bar{C}_K(I_p)/\bar{\Gamma}_p(m+p,K).$$

Laat $L = U\Delta\bar{U}'$ soos in die bewys van stelling 5.4.1 en integreer na U. Dus

5.4.6 $$\int_0^I|\Delta|^{m-p}\bar{\alpha}_p(\Delta)\bar{C}_K(\Delta)d\Delta = \bar{\Gamma}_p(p)\bar{\Gamma}_p(p)\bar{\Gamma}_p(m,K)\bar{C}_K(I_p)/(\pi^{p(p-1)}$$
$$\bar{\Gamma}_p(m+p,K)).$$

Laat/ ...

Laat $x_{i-1} = l_i/l_1$ $(i=1,--,p-1)$ soos hierbo, dan

$$\int_0^I |\Delta|^{m-p}\bar{\alpha}_p(\Delta)\bar{C}_\delta(\Delta)d\Delta$$

$$= \int_0^1\int_0^I l_1^{mp+k-1}|X|^{m-p}\bar{\alpha}_{p-1}(X)|I-X|^2\bar{C}_K(X^1)dXdl_1$$

$$= (1/(mp+k))\int_0^I|X|^{m-p}|I-X|^2\bar{\alpha}_{p-1}(X)\bar{C}_K(X^1)dX.$$

Stel hierdie oplossing gelyk aan 5.4.6 en die integraal 5.4.5 volg. Dit bewys ook die afleiding.

Indien Θ van rang $r<p$ is, is die verdeling van l_1 voor die hand liggend.

Stelling 5.4.2

Indien $A\sim CW(\Sigma,m,\Theta)$ en $B\sim CW(\Sigma,n)$, Θ van rang p, word die gesamentlike verdelingsfunksie van die karakteristieke wortels $l_1, l_2, --, l_p$ van L gegee deur

5.4.7 $$f(\Delta) = \pi^{p(p-1)}\bar{\Gamma}_p(m+n)/(\bar{\Gamma}_p(p)\bar{\Gamma}_p(m)\bar{\Gamma}_p(n))\text{esp}(-\Theta)|\Delta|^{m-p}$$
$$|I-\Delta|^{n-p}\bar{\alpha}_p(\Delta)\,{}_1\bar{F}_1(m+n\ ;\ m\ ;\ \Theta,\Delta),\quad 0<\Delta<I.$$

Bewys.

Die bewys is soortgelyk as die van stelling 5.4.1 uit 5.2.8.

Afleiding 5.4.2

Indien $A\sim CW(\Sigma,m,\Theta)$ en $B\sim CW(\Sigma,n)$, Θ van rang p, word die verdelingsfunksie van die grootste wortel l_1 gegee deur

5.4.8 $$f(l_1) = \bar{\Gamma}_p(m+n)\bar{\Gamma}_p(p)/(\bar{\Gamma}_p(n)\bar{\Gamma}_p(m+p))\ \text{esp}(-\Theta)\Sigma_k\Sigma_K\Sigma_j\Sigma_J\Sigma_\delta$$
$$g_{K,J}^{\delta}[m+n]_K[p-n]_J[m]_\delta/([m]_K[m+p]_\delta l_1^{mp+k+j-1}$$
$$(mp+k+j)\bar{C}_K(\Theta)\bar{C}_\delta(I_p)/(\bar{C}_K(I_p)k!j!),\quad 0<l_1<1.$$

Bewys.

Onder die substitusie $x_{i-1} = l_i/l_1$, volg dat

$$f(l_1,X) = \pi^{p(p-1)}\bar{\Gamma}_p(m+n)/(\bar{\Gamma}_p(p)\bar{\Gamma}_p(m)\bar{\Gamma}_p(n))\text{esp}(-\Theta)|X|^{m-p}|I-X|^2$$
$$\bar{\alpha}_{p-1}(X)\Sigma_k\Sigma_K\Sigma_j\Sigma_J l_1^{mp+k+j-1}[m+n]_K[p-n]_J\bar{C}_K(\Theta)\bar{C}_K(X^1)\bar{C}_J(X^1)$$
$$([m]_K\bar{C}_K(I_p)k!j!)^{-1}.$$

Integreer na X deur gebruik te maak van 5.4.4 en die afleiding volg.

Stelling 5.4.3

Indien $A \sim CW(\Sigma_1, m)$ en $B \sim CW(\Sigma_2, n)$ word die gesamentlike verdelingsfunksie van die karakteristieke wortels van L gegee deur

$$5.4.9 \quad f(\Delta) = \pi^{p(p-1)}\bar{\Gamma}_p(m+n)/(\bar{\Gamma}_p(p)\bar{\Gamma}_p(m)\bar{\Gamma}_p(n))|\Sigma_1^{-1}\Sigma_2|^m|\Delta|^{m-p}$$

$$|I-\Delta|^{n-p}\bar{\alpha}_p(\Delta)\,{}_1\bar{F}_0(m+n\ ;\ I-\Sigma_1^{-1}\Sigma_2,\Delta)\ ,\quad 0<\Delta<I.$$

Bewys.

Sien die bewys van stelling 5.4.1.

Afleiding 5.4.3

Indien $A \sim CW(\Sigma_1, m)$ en $B \sim CW(\Sigma_2, n)$ word die verdelingsfunksie van die grootste wortel van L gegee deur

$$5.4.10 \quad f(l_1) = \bar{\Gamma}_p(m+n)\bar{\Gamma}_p(p)/(\bar{\Gamma}_p(n)\bar{\Gamma}_p(m+p))|\Sigma_1^{-1}\Sigma_2|^m\Sigma_k\Sigma_K\Sigma_j\Sigma_J\Sigma_\delta$$

$$g_{K,J}^{\delta}\,l_1^{mp+k+j-1}(mp+k+j)[m+n]_K[m]_\delta[p-n]_J\bar{C}_\delta(I_p)$$

$$\bar{C}_K(I-\Sigma_1^{-1}\Sigma_2)/([m+p]_\delta\bar{C}_K(I_p)k!j!),\quad 0<l_1<1.$$

Bewys.

Sien die bewys van afleiding 5.4.2

5.5 Die momente van spL en sp(I-L).

Met behulp van die integrale

$$5.5.1 \quad \int_0^I |\Delta|^{m-p}|I-\Delta|^{n-p}\ \bar{\alpha}_p(\Delta)\bar{C}_K(I-\Delta)d\Delta$$

$$= \bar{\Gamma}_p(p)\bar{\Gamma}_p(m)\bar{\Gamma}_p(n,K)\bar{C}_K(I_p)/(\pi^{p(p-1)}\bar{\Gamma}_p(m+n,K))$$

en

$$5.5.2 \quad \int_0^I|\Delta|^{m-p}|I-\Delta|^{n-p}\ \bar{\alpha}_p(\Delta)\bar{C}_K(\Delta)d\Delta$$

$$= \bar{\Gamma}_p(p)\bar{\Gamma}_p(n)\bar{\Gamma}_p(m,K)\bar{C}_K(I_p)/(\pi^{p(p-1)}\bar{\Gamma}_p(m+n,K)),$$

wat herlei word uit 5.4.1 en 5.4.7 respektiewelik, is dit

moontlik/ ...

moontlik om die verwagte waardes van die sonale-polinome $\overline{C}_K(\Delta)$ en $\overline{C}_K(I-\Delta)$ te vind. Omdat $spL = sp\Delta$ en $sp(I-L) = sp(I-\Delta)$ word die momente van $sp\Delta$ en $sp(I-\Delta)$ gevind. Die bewyse is dieselfde as die in paragraaf 2.5 en daarom word slegs die stellings gegee.

Stelling 5.5.1

Indien $A \sim CW(\Sigma,m)$ en $B \sim CW(\Sigma,n,\Theta)$, Θ van rang $r \leq p$, is

5.5.3 $$E\overline{C}_J(I-\Delta) = esp(-\Theta_r)\Sigma_k\Sigma_K\Sigma_\delta g^{\delta}_{K,J}[m+n]_K[n]_\delta\overline{C}_K(\Theta_r)\overline{C}_\delta(I_p)/([m+n]_\delta[n]_K\overline{C}_K(I_p)k!)$$

en

5.5.4 $$M_{sp(I-\Delta)}(t) = esp(-\Theta_r)\Sigma_k\Sigma_K\Sigma_j\Sigma_J\Sigma_\delta g^{\delta}_{K,J}t^j[m+n]_K[n]_\delta\overline{C}_\delta(I_p)\overline{C}_K(\Theta_r)/([m+n]_\delta[n]_K\overline{C}_K(I_p)k!j!).$$

Stelling 5.5.2

Indien $A \sim CW(\Sigma,m,\Theta)$ en $B \sim CW(\Sigma,n)$, Θ van rang $r \leq p$, is

5.5.5 $$E\overline{C}_J(\Delta) = esp(-\Theta_r)\Sigma_k\Sigma_K\Sigma_\delta g^{\delta}_{K,J}[m+n]_K[m]_\delta\overline{C}_K(\Theta_r)\overline{C}_\delta(I_p)/([m]_K[m+n]_\delta\overline{C}_K(I_p)k!)$$

en

5.5.6 $$M_{sp\Delta}(t) = esp(-\Theta_r)\Sigma_k\Sigma_K\Sigma_j\Sigma_J\Sigma_\delta g^{\delta}_{K,J}t^j[m+n]_K[m]_\delta\overline{C}_K(\Theta_r)\overline{C}_\delta(I_p)/([m]_K[m+n]_\delta\overline{C}_K(I_p)k!j!).$$

Stelling 5.5.3

Indien $A \sim CW(\Sigma_1,m)$ en $B \sim CW(\Sigma_2,n)$, is

5.5.7 $$E\overline{C}_J(\Delta) = |\Sigma_1^{-1}\Sigma_2|^m\Sigma_k\Sigma_K\Sigma_\delta g^{\delta}_{K,J}[m+n]_K[m]_\delta\overline{C}_K(I-\Sigma_1^{-1}\Sigma_2)\overline{C}_\delta(I_p)/([m+n]_\delta\overline{C}_K(I_p)k!)$$

en

5.5.8 $$M_{sp\Delta}(t) = |\Sigma_1^{-1}\Sigma_2|^m\Sigma_k\Sigma_K\Sigma_j\Sigma_J\Sigma_\delta g^{\delta}_{K,J}[m+n]_K[m]_\delta\overline{C}_\delta(I_p)\overline{C}_K(I-\Sigma_1^{-1}\Sigma_2)/([m+n]_\delta\overline{C}_K(I_p)k!j!).$$

5.6 Die/ ...

5.6 Die verdeling van L in terme van onafhanklike beta-verdelings van die eerste soort.

In hierdie paragraaf sal aangetoon word dat die komplekse nie-sentrale meerveranderlike beta-verdeling van die eerste soort van rang $r<p$, soos gedefinieer in 5.2.4, geskrywe kan word as 'n komplekse nie-sentrale meerveranderlike beta-verdeling van die eerste soort van volle rang vermenigvuldig met die produk van onafhanklike eenveranderlike beta-verdelings van die eerste soort.

Volgens 5.2.4 kan die verdelingsfunksie van L geskrywe word

5.6.1 $$f(L) \propto \operatorname{esp}(-\Theta_r)|L|^{m-p}|I-L|^{n-p}\int_{T_{11}>0}\operatorname{esp}(-T_{11})|T_{11}|^{m+n-r}$$
$$ {}_0\bar{F}_1(n\;;\;\Theta_r T_{11}^{1/2}(I-L_{11})T_{11}^{1/2})dT_{11}.$$

Onder die opsplitsing $L = \begin{pmatrix} L_{11} & L_{12} \\ L_{21} & L_{22} \end{pmatrix}$, volg

$|L| = |L_{11}||L_{22.1}|$ waar $L_{22.1} = L_{22} - L_{21}L_{11}^{-1}L_{12}$.

$J(L_{22}\rightarrow L_{22.1}) = 1.$

$|I-L| = |I-L_{11}||I-L_{22.1}-\bar{U}'U|$ waar $U = ((I-L_{11})^{-1}L_{11}^{-1})^{1/2}L_{12}$.

Die jakobiaan van die transformasie is

$$J(L_{12}\rightarrow U) = |I-L_{11}|^{p-r}|L_{11}|^{p-r},$$

wat soos volg bewys kan word:

Laat $U(rxp-r) = (U_1,--,U_{p-r})$, $L_{12}(rxp-r) = (L_{(1)},--,L_{(p-r)})$ en $((I-L_{11})^{-1}L_{11}^{-1})^{1/2} = R$. Dus $U_1 = RL_{(1)}$, --, $U_{p-r} = RL_{(p-r)}$.

Omdat $U_j = U_{jR}+iU_{jI}$ en $L_{(j)} = L_{(j)R}+iL_{(j)I}$, volg dat

$$\begin{aligned} J(L_{(j)}\rightarrow U_j) &= J(L_{(j)R},L_{(j)I}\rightarrow U_{jR},U_{jI}) \\ &= J(L_{(j)R}\rightarrow U_{jR})\cdot J(L_{(j)I}\rightarrow U_{jI}) \\ &= |R|^{-2}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Dus } J(L_{12}\rightarrow U) &= \prod_{j=1}^{p-r} J(L_{(j)}\rightarrow U_j) = |R|^{-2(p-r)} \\ &= |I-L_{11}|^{p-r}|I-L_{11}|^{p-r} \quad \text{Q.E.D.} \end{aligned}$$

Die/ ...

Die verdelingsfunksie van L kan derhalwe geskrywe word

5.6.2 $f(L) \quad \mathrm{esp}(-\Theta_r)|L_{11}|^{m-r}|I-L_{11}|^{n-r}|L_{22.1}|^{m-p}|I-L_{22.1}-\bar{U}'U|^{n-p}$

$$\int_{T_{11}>0}\mathrm{esp}(-T_{11})|T_{11}|^{m+n-r}\,{}_0\bar{F}_1(n\ ;\ \Theta_r T_{11}^{1/2}(I-L_{11})T_{11}^{1/2})\,dT_{11}.$$

Stel $W = U(I-L_{22.1})^{-1/2}$ met $J(U \rightarrow W) = |I-L_{22.1}|^r$. Dus

5.6.3 $f(L) \quad \mathrm{esp}(-\Theta_r)|L_{11}|^{m-r}|I-L_{11}|^{n-r}\int_{T_{11}>0}\mathrm{esp}(-T_{11})|T_{11}|^{m+n-r}$

$${}_0\bar{F}_1(n\ ;\ \Theta_r T_{11}^{1/2}(I-L_{11})T_{11}^{1/2})\,dT_{11}\cdot|L_{22.1}|^{m-p}$$

$$|I-L_{22.1}|^{n-p+r}|I-\bar{W}'W|^{n-p}.$$

Die volgende stelling is nou bewys:

<u>Stelling 5.6.1</u>

Indien $L \sim C\beta_1(m,n,\Theta_r)$, $r<p$, kan die verdelingsfunksie van L geskrywe word

5.6.4 $C\beta_1(L\ ;\ m,n,\Theta_r) = f_1(L_{11})\ f_2(L_{22.1})\ f_3(W)$

waar

5.6.5 $L_{11}(r\mathrm{x}r) \sim C\beta_1(m,n,\Theta_r)$,

5.6.6 $L_{22.1}(p-r\mathrm{x}p-r) \sim C\beta_1(m-r,n)$

en

5.6.7 $f_3(W) \propto |I-\bar{W}'W|^{n-p}$.

Beskou die verdeling van W.

Laat $\bar{W}' = (\bar{W}_1',--,\bar{W}_r')$. Dus

$$|I-\bar{W}'W| = |I-\Sigma_{k=1}^{r-1}\bar{W}_k'W_k|(1-W_r(I-\Sigma_{k=1}^{r-1}\bar{W}_k'W_k)^{-1}\bar{W}_r').$$

Stel $E_r = W_r(I-\Sigma_{k=1}^{r}\bar{W}_k'W_k)^{-1/2}$ met $J(W_r \rightarrow E_r) = |I-\Sigma_{k=1}^{r-1}\bar{W}_k'W_k|$.

Derhalwe is $|I-\bar{W}'W| = |I-\Sigma_{k=1}^{r-1}\bar{W}_k'W_k|(1-E_r\bar{E}_r')$. Deur hierdie prosedure te herhaal, volg

5.6.8 $|I-\bar{W}'W| = \prod_{i=1}^{r}(1-E_i\bar{E}_i')$.

Laat $\bar{E}'(r\mathrm{x}p-r) = (\bar{E}_1',--,\bar{E}_r')$, $E_1 = W_1$.

5.6.9 J/ ...

5.6.9 $J(W\to E) = \prod_{i=1}^{r}(1-E_i\bar{E}_i')^{r-i}$.

Aangesien $E_i(1xp-r) = E_{iR}+iE_{iI}$, is

$$E_i\bar{E}_i' = E_{iR}E_{iR}' + E_{iI}E_{iI}'.$$

Laat derhalwe $F_i = (E_{iR},E_{iI})$ $(1x2(p-r))$, dan

5.6.10 $|I-\bar{W}'W| = \prod_{i=1}(1-F_iF_i')$

en

5.6.11 $J(W\to E) = J(W\to F) = \prod_{i=1}^{r}(1-F_iF_i')^{r-i}$.

Aangesien F reëel is, kan nou soortgelyk as in 2.6.16 te werk gegaan word, d.i. laat

$$F_i'(2(p-r)x1) = X_i' = \begin{pmatrix} x_{i1}^{1/2} \\ (1-x_{i1})^{1/2}x_{i2}^{1/2} \\ \text{-------------} \\ (1-x_{i1})^{1/2}\cdots(1-x_{i,2(p-r)-1})^{1/2}x_{i,2(p-r)}^{1/2} \end{pmatrix}.$$

$$J(F_i\to X_i) = (1/2)^{2(p-r)}\prod_{j=1}^{2(p-r)} x_{ij}^{-1/2}(1-x_{ij})^{(2(p-r)-j)/2}.$$

Dus

5.6.12 $J(F\to X) = (1/2)^{2r(p-r)}\prod_{i=1}^{r}\prod_{j=1}^{2(p-r)} x_{ij}^{-1/2}(1-x_{ij})^{p-r-j/2}$

waar $F' = (F_1',--,F_r')$ en $X' = (X_1',--,X_r')$. 5.6.10 en 5.6.11 is nou respektiewelik

5.613 $|I-\bar{W}'W| = \prod_{i=1}^{r}\prod_{j=1}^{2(p-r)}(1-x_{ij})$

en

$$J(W\to F) = \prod_{i=1}^{r}\prod_{j=1}^{2(p-r)}(1-x_{ij})^{r-i}.$$ Derhalwe is

5.6.14 $J(W\to X) = (1/2)^{2r(p-r)}\prod_{i=1}^{r}\prod_{j=1}^{2(p-r)} x_{ij}^{-1/2}(1-x_{ij})^{p-i-j/2}$.

Die verdeling van W (5.6.7) kan nou geskrywe word

$$f_3(W)\propto\prod_{i=1}^{r}\prod_{j=1}^{2(p-r)} x_{ij}^{-1/2}(1-x_{ij})^{(2(n-i)-j)/2},$$

d.i.

5.6.15 $f_3(W) = \prod_{i=1}^{r}\prod_{j=1}^{2(p-r)} \beta_1(x_{ij}\ ;\ 1/2,(2(n-i+1)-j)/2)$.

Deur nou gebruik te maak van 5.6.4 en 5.6.15 kan soos vir

die/ ...

die reële geval (2.6) aangetoon word dat

5.6.16 $f_2(L_{22.1}) = \prod_{i=1}^{r}\beta_1(u_i\ ;\ m-r-i+1,n)\prod_{i=1}^{p-r-1}\prod_{j=1}^{2(p-r-i)}$
$\beta_1(v_{ij}\ ;\ 1/2,n-j/2).$

Derhalwe is

$$f_2(L_{22.1})f_3(W) = \prod_{i=r+1}^{p}\beta_1(u_i\ ;\ m-i+1,n)$$
$$\prod_{i=1}^{p-r-1}\prod_{j=1}^{2(p-r-i)}\beta_1(v_{ij}\ ;\ 1/2,(2n-j)/2)$$
$$\prod_{i=1}^{r}\prod_{j=1}^{2(p-r)}\beta_1(x_{ij}\ ;\ 1/2,(2(n-i+1)-j)/2).$$

Dit kan nou aangetoon word dat

$$\prod_{i=1}^{p-r-1}\prod_{j=1}^{2(p-r-i)}\beta_1(v_{ij}\ ;\ 1/2,(2n-j)/2)$$
$$\prod_{i=1}^{r}\prod_{j=1}^{2(p-r)}\beta_1(x_{ij}\ ;\ 1/2,(2(n-i+1)-j)/2)$$
$$= \prod_{i=r+1}^{p}\prod_{j=1}^{2(i-1)}\beta_1(w_{ij}\ ;\ 1/2,(2(n-i)+j+1)/2),$$

wat beteken dat

5.6.17 $$f_2(L_{22.1})f_3(W) = \prod_{i=r+1}^{p}\beta_1(u_i\ ;\ m-i+1,n)$$
$$\prod_{j=1}^{2(i-1)}\beta_1(w_{ij}\ ;\ 1/2,(2(n-i)+j+1)/2).$$

Substitueer hierdie resultaat in 5.6.4 en die volgende stelling is bewys;

Stelling 5.6.2

Indien $L \sim C\beta_1(m,n,\theta_r)$, $r<p$, kan die verdelingsfunksie van L geskrywe word

5.6.18 $$C\beta_1(L\ ;\ m,n,\theta_r) = C\beta_1(L_{11}(r\times r);\ m,n,\theta_r)\cdot$$
$$\prod_{i=r+1}^{p}\beta_1(u_i\ ;\ m-i+1,n)\cdot$$
$$\prod_{j=1}^{2(i-1)}\beta_1(w_{ij}\ ;\ 1/2,(2(n-i)+j+1)/2).$$

Stelling 5.6.3

Indien $L \sim C\beta_1(m,n,\theta_r)$, $r<p$, kan die verdelingsfunksie van $|L|$ geskrywe word

5.6.19 $$f(|L|) = f_1(|L_{11}|)\prod_{i=r+1}^{p}\beta_1(u_i\ ;\ m-i+1,n)$$

waar/ ...

waar $L_{11}(rxr) \sim C\beta_1(m,n,\theta_r)$.

Bewys.

Die stelling volg deur van 5.2.6 gebruik te maak (sien stelling 2.6.2).

Stelling 5.6.4

Indien $L \sim C\beta_1(m,n,\theta_r)$, $r<p$, kan die verdelingsfunksie van $|I-L|$ geskrywe word

$$5.6.20 \quad f(|I-L|) = f_1(|I-L_{11}|) \prod_{i=r+1}^{p} \beta_1(1-u_i \,;\, n,m-i+1)$$

waar $I-L_{11} \sim C\beta_1(n,m,\theta_r)$.

Bewys.

Die stelling volg deur gebruik te maak van 5.2.7 (sien stelling 2.6.3).

HOOFSTUK VI.

DIE KOMPLEKSE NIE-SENTRALE MEERVERANDERLIKE BETA-VERDELING VAN DIE TWEEDE SOORT.

6.1 Inleiding.

Laat $V = B^{-1/2}AB^{-1/2}$ waar $A \sim CW(\Sigma,m)$ en $B \sim CW(\Sigma,n,\Theta)$. V is dus 'n komplekse veranderlike en kan geskrywe word as $V = V_R + iV_I$. Dit is verder Hermities positief definiet. Die verdeling van V word in 6.2 gedefinieer. In 6.3 word die gesamentlike verdeling van die karakteristieke wortels van V gevind en in 6.4 die verdelings van spV en spV^{-1}. In 6.5 word aangetoon dat die verdeling van V, indien Θ van rang $r<p$ is, geskrywe kan word as die produk van onafhanklike beta-verdelings van die tweede soort.

6.2 Die verdeling van V.

Stelling 6.3.1

Indien $A \sim CW(\Sigma,m)$ en $B \sim CW(\Sigma,n,\Theta)$, Θ van rang p, word die verdelingsfunksie van V gegee deur

6.2.1 $$f(V) = (1/(\bar{\Gamma}_p(m)\bar{\Gamma}_p(n)))|\Sigma|^{-(m+n)}\text{esp}(-\Theta)|V|^{m-p}\int_{B=\bar{B}'>0} \text{esp}(-(\Sigma^{-1}B+B^{1/2}\Sigma^{-1}B^{1/2}V))|B|^{m+n-p}{}_0\bar{F}_1(n\ ;\ \Theta\Sigma^{-1}B)dB,$$
$$V>0.$$

Bewys.

Stel $V = B^{-1/2}AB^{-1/2}$, $J(A\to V) = |B|^p$, in die gesamentlike verdeling van A en B en integreer na B.

Afleiding 6.2.1

Indien $A \sim CW(I,m)$ en $B \sim CW(I,n,\Theta)$, Θ van rang p, word die verdelingsfunksie van V gegee deur

6.2.2 $$C\beta_2(V\ ;\ m,n,\Theta) = \bar{\Gamma}_p(m+n)/(\bar{\Gamma}_p(m)\bar{\Gamma}_p(n))\text{esp}(-\Theta)|V|^{m-p} |I+V|^{-(m+n)}{}_1\bar{F}_1(m+n\ ;\ n\ ;\ \Theta(I+V)^{-1}),\quad V>0.$$

Bewys/ ...

<u>Bewys</u>.

Stel $\Sigma=I$ in 6.2.1 en integreer met betrekking tot B deur gebruik te maak van 1.3.8.

Die verdeling van V word na analogie van die verdeling 3.2.2 genoem die komplekse nie-sentrale meerveranderlike beta-verdeling van die tweede soort van volle rang.

Uit 6.3.2 volg die integraal

6.2.3 $\int_{V>0}|V|^{m-p}|I+V|^{-(m+n)}\overline{C}_K(\Theta(I+V)^{-1})dV$

$$= \overline{\Gamma}_p(m)\overline{\Gamma}_p(n,K)\overline{C}_K(\Theta)/\overline{\Gamma}_p(m+n,K).$$

Laat $V = (I-L)^{-1/2}L(I-L)^{-1/2}$, d.i. $(I+V)^{-1} = I-L$, met jakobiaan $|I-L|^{-2p} = C\beta_1(L\ ;\ m,n)/C\beta_2(V\ ;\ m,n)$. Bostaande integraal kan derhalwe ook geskrywe word

6.2.4 $\int_0^I|L|^{m-p}|I-L|^{n-p}\overline{C}_K(\Theta(I-L))dL$

$$= \overline{\Gamma}_p(m)\overline{\Gamma}_p(n,K)\overline{C}_K(\Theta)/\overline{\Gamma}_p(m+n,K).$$

Dit is dan ook 'n bewys vir die integraal 5.2.1.

Met behulp van 6.2.3 kan aangetoon word dat

6.2.5 $E|V|^h = \overline{\Gamma}_p(m+h)\overline{\Gamma}_p(n-h)/(\overline{\Gamma}_p(m)\overline{\Gamma}_p(n))esp(-\Theta)\,{}_1\overline{F}_1(n-h\ ;\ n;\Theta)$

en

6.2.6 $E|I+V|^{-h} = \overline{\Gamma}_p(n+h)\overline{\Gamma}_p(m+n)/(\overline{\Gamma}_p(n)\overline{\Gamma}_p(m+n+h))esp(-\Theta)$

$${}_2\overline{F}_2(n+h,m+n\ ;\ m+n+h,n\ ;\ \Theta).$$

Hierdie momente geld ook indien V verdeel is soos in stelling 6.3.1 aangesien hulle invariant is ten opsigte van die transformasies $A\rightarrow\Sigma^{1/2}A\Sigma^{1/2}$ en $B\rightarrow\Sigma^{1/2}B\Sigma^{1/2}$.

Deur Θ as diagonaal te beskou in 6.2.2, d.i. die verdeling van B word in sy kanoniese vorm beskou, kan die verdelingsfunksie van V geskrywe word as

6.2.7 $C\beta_2(V\ ;\ m,n,\Theta_r) = \overline{\Gamma}_p(m+n)/(\overline{\Gamma}_p(m)\overline{\Gamma}_p(n))esp(-\Theta_r)|V|^{m-p}$

$$|I+V|^{-(m+n)}\,{}_1\overline{F}_1(m+n\ ;\ n\ ;\ \Theta_r(I+V_{1.2})^{-1})$$

indien/ ...

indien Θ van rang $r<p$ is. $V_{1.2} = V_{11}-V_{12}(I+V_{22})^{-1}V_{21}$ onder die opsplitsing $V = \begin{pmatrix} V_{11} & V_{12} \\ V_{21} & V_{22} \end{pmatrix}$ sodanig dat V_{11} van orde r is.

Laasgenoemde verdeling is 'n komplekse nie-sentrale meerveranderlike beta-verdeling van die tweede soort van rang r.

Die momente van $|V|$ en $|I+V|^{-1}$ kan in hierdie geval uit 6.2.5 en 6.2.6 respektiewelik herlei word.

6.3 Die verdeling van die karakteristieke wortels van V.

Stelling 6.3.1

Indien $A \sim CW(\Sigma,m)$ en $B \sim CW(\Sigma,n,\Theta)$, Θ van rang p, word die gesamentlike verdelingsfunksie van die karakteristieke wortels van V gedefinieer as

6.3.1 $$f(V_s) = \pi^{p(p-1)}\bar{\Gamma}_p(m+n)/(\bar{\Gamma}_p(m)\bar{\Gamma}_p(n)\bar{\Gamma}_p(p))\text{esp}(-\Theta)|V_s|^{m-p}$$
$$|I+V_s|^{-(m+n)}\ \bar{\alpha}_p(V_s)\,{}_1\bar{F}_1(m+n\ ;\ n\ ;\ \Theta,(I+V_s)^{-1})$$

waar $V_s = \text{diag}(v_1,--,v_p)$. $v_1>-->v_p>0$ is die karakteristieke wortels van V.

Bewys.

Omdat die karakteristieke wortels van V invariant is ten opsigte van die transformasies $A \to \Sigma^{1/2}A\Sigma^{1/2}$ en $B \to \Sigma^{1/2}B\Sigma^{1/2}$, kan die stelling uit 6.3.2 bewys word. Daar bestaan 'n unitêre matriks U sodanig dat

$$\bar{U}'VU = \text{diag}(v_1,--,v_p) = V_s .$$

$dV = \bar{\alpha}_p(V_s)dV_s d(U)$. Integrasie na U 'n element van die unitêre groep in die gesamentlike verdeling van U en V_s lewer die stelling.

Hierdie verdeling is reeds deur James (1964) gedefinieer, maar volgens 'n ander metode.

6.4 Die/ ...

6.4 Die verdelings van spV en spV^{-1}.

Omdat die karakteristieke wortels van V en V^{-1} reëel is, kan die Laplace-getransformeerde funksie soos gebruik in 3.4 ook hier gebruik word vir die aflei van die verdelings van spV en spV^{-1}.

Beskou eers die verdeling van spV. Deur gebruik te maak van 6.2.1 kan die Laplace-getransformeerde funksie van spV geskrywe word

6.4.1
$$\begin{aligned} g(t) &= E(esp(-tV)) \\ &= (1/(\bar{\Gamma}_p(m)\bar{\Gamma}_p(n)))|\Sigma|^{-(m+n)}esp(-\Theta)\int_{V>0}\int_{B>0}|V|^{m-p} \\ &\quad esp(-\Sigma^{-1}B)esp(-(B^{1/2}\Sigma^{-1}B^{1/2}+tI)V)|B|^{m+n-p} \\ &\quad {}_0\bar{F}_1(n\ ;\ \Theta\Sigma^{-1}B)dBdV \\ &= (1/(\bar{\Gamma}_p(n)|\Sigma|^{m+n})esp(-\Theta)\int_{B>0}esp(-\Sigma^{-1}B)|B|^{m+n-p} \\ &\quad |B^{1/2}\Sigma^{-1}B^{1/2}+tI|^{-m}{}_0\bar{F}_1(n\ ;\ \Theta\Sigma^{-1}B)dB. \end{aligned}$$

Maar

6.4.2
$$|B^{1/2}\Sigma^{-1}B^{1/2}+tI|^{-m} = t^{-mp}\Sigma_j\Sigma_J[m]_J\bar{C}_J(-\Sigma^{-1}B/t)$$

en derhalwe is die integraal na B

$$\begin{aligned} &\int_{B>0}esp(-\Sigma^{-1}B)|B|^{m+n-p}\bar{C}_J(\Sigma^{-1}B)\bar{C}_K(\Theta\Sigma^{-1}B)dB \\ &= |\Sigma|^{m+n}\int_{B>0}esp(-B)|B|^{m+n-p}\bar{C}_J(B)\bar{C}_K(\Theta B)dB. \end{aligned}$$

g(t) word nou

6.4.3
$$\begin{aligned} g(t) &= (1/\bar{\Gamma}_p(n))esp(-\Theta)\Sigma_k\Sigma_K\Sigma_j\Sigma_J[m]_J t^{-(mp+j)}(-1)^j/([n]_K \\ &\quad k!j!)\int_{B>0}esp(-B)|B|^{m+n-p}\bar{C}_J(B)\bar{C}_K(\Theta B)dB. \end{aligned}$$

Om die integraal na B te vind, kan weer soos in paragraaf 3.4 te werk gegaan word wat baie omslagtig is, terwyl dit volgens 'n veel korter metode gevind kan word. Aangesien die oplossing van die integraal 'n simmetriese funksie in Θ is, voer die unitêre transformasie $\Theta \rightarrow C\Theta\bar{C}'$ in $\bar{C}_K(\Theta B)$ uit

en/ ...

en integreer na C 'n element van die unitêre groep $U(p)$ met behulp van 1.2.17. Die integraal word nou

$$\int_{B>0} \mathrm{esp}(-B)|B|^{m+n-p}\overline{C}_J(B)\int_{U(p)}\overline{C}_K(C\Theta\overline{C}')d(C)dB$$

$$=(\overline{C}_K(\Theta)/\overline{C}_K(I_p))\int_{B>0}\mathrm{esp}(-B)|B|^{m+n-p}\overline{C}_J(B)\overline{C}_K(B)dB$$

$$=(\overline{C}_K(\Theta)/\overline{C}_K(I_p))\,\Sigma_\delta g_{K,J}^{\delta}\overline{\Gamma}_p(m+n,\delta)\overline{C}_\delta(I_p).$$

Dus

6.4.4 $$g(t)=(\overline{\Gamma}_p(m+n)/\overline{\Gamma}_p(n))\,\mathrm{esp}(-\Theta)\Sigma_k\Sigma_K\Sigma_j\Sigma_J\Sigma_\delta g_{K,J}^{\delta}t^{-(mp+j)}$$
$$(-1)^j[m]_J[m+n]_\delta\overline{C}_K(\Theta)\overline{C}_\delta(I_p)/([n]_K\overline{C}_K(I_p)k!j!).$$

Deur nou die Laplace-inverse te neem, volg die volgende stelling.

<u>Stelling 6.4.1</u>

Indien $V\sim C\beta_2(m,n,\Theta)$ word die verdelingsfunksie van $\mathrm{sp}V = T$ gegee deur

6.4.5 $$f(T)=\overline{\Gamma}_p(m+n)/(\overline{\Gamma}_p(n)\Gamma(mp))\mathrm{esp}(-\Theta)\Sigma_k\Sigma_K\Sigma_j\Sigma_J\Sigma_\delta g_{K,J}^{\delta}(-1)^j$$
$$T^{mp+j-1}[m]_J[m+n]_\delta\overline{C}_K(\Theta)\overline{C}_\delta(I_p)/([n]_K(mp)_j\overline{C}_K(I_p)k!j!),$$
$$T>0.$$

Om die verdeling van $\mathrm{sp}V^{-1}$ te definieer, is die volgende hulp-stelling nodig:

<u>Hulp-stelling 6.4.1</u>

6.4.6 $$|I+R|^{-a}[a]_K\overline{C}_K(R^{-1}+1)^{-1}$$
$$=\Sigma_j\Sigma_J\Sigma_\delta g_{K,J}^{\delta}(-1)^j[a]_\delta\overline{C}_\delta(R)/j!$$ (R Hermities positief definiet).

<u>Bewys</u>.

Beskou die integraal

$$\int_{S=\overline{S}'>0}\mathrm{esp}(-(I+R)S)|S|^{a-p}\overline{C}_K(RS)dS$$

$$=\overline{\Gamma}_p(a,K)|I+R|^{-a}\overline{C}_K((I+R)^{-1}R).$$

Die integraal/ ...

Die integraal kan ook geskrywe word

$$\int_{S>0}\text{esp}(-S)|S|^{a-p}\Sigma_j\Sigma_J(-1)^j\overline{C}_K(RS)\overline{C}_J(RS)dS/j!$$

$$= \Sigma_j\Sigma_J\Sigma_\delta g_{K,J}^{\delta}(-1)^j\overline{\Gamma}_p(a,\delta)\overline{C}_\delta(R)/j!$$

Stel hierdie twee oplossings gelyk en die hulp-stelling is bewys.

Die verdeling van spV^{-1} kan nou gevind word. Omdat $spV^{-1} = spA^{-1}B$, laat $Z = A^{-1/2}BA^{-1/2}$. Dus $spV^{-1} = spZ$. Die gesamentlike verdelingsfunksie van A en B word gegee deur $(\Sigma=I)$

$$f(A,B) = (1/\overline{\Gamma}_p(m)\overline{\Gamma}_p(n))\text{esp}(-\Theta)|A|^{m-p}|B|^{n-p}\text{esp}(-(A+B))_0\overline{F}_1(n\ ;\ \Theta B)$$

en dus is die voorskrif van die Laplace-getransformeerde funksie van spZ

$$g(t) = E(\text{esp}(-tZ))$$

$$= (1/\overline{\Gamma}_p(m)\overline{\Gamma}_p(n))\text{esp}(-\Theta)\int_{Z>0}\int_{A>0}|A|^{m+n-p}|Z|^{n-p}\text{esp}(-A)$$

$$\text{esp}(-(A+tI)Z)_0\overline{F}_1(n\ ;\ \Theta A^{1/2}ZA^{1/2})dAdZ.$$

Integreer na Z met behulp van 1.3.8. Dus

6.4.7 $$g(t) = (1/\overline{\Gamma}_p(m))\text{esp}(-\Theta)\int_{A>0}|A|^{m+n-p}\text{esp}(-A)|A+tI|^{-n}$$

$$_0\overline{F}_0(A^{1/2}\Theta A^{1/2}(A+tI)^{-1})dA$$

$$= (1/\overline{\Gamma}_p(m))\text{esp}(-\Theta)\int_{A>0}|A|^{m+n-p}\text{esp}(-A)t^{-np}|I+\tfrac{1}{t}A|^{-n}$$

$$_0\overline{F}_0(\Theta(I+tA^{-1})^{-1})dA.$$

Omdat die oplossing van die integraal na A 'n simmetriese funksie in Θ is, kan dieselfde metode soos gebruik vir die integraal na B in 6.4.3, gebruik word. Die hipergeometriese funksie kan derhalwe geskrywe word

$$_0\overline{F}_0(\Theta\ ;\ (I+tA^{-1})^{-1}).$$

Maar volgens 6.4.6 is

$$|I+\tfrac{1}{t}A|^{-n}[n]_K\overline{C}_K(I+tA^{-1})^{-1} = \Sigma_j\Sigma_J\Sigma_\delta g_{K,J}^{\delta}(-1)^j[n]_\delta\overline{C}_\delta(A/t).$$

Dus g(t)/ ...

Dus g(t) word nou

6.4.8 $g(t) = (1/\bar{\Gamma}_p(m))\text{esp}(-\Theta)\Sigma_k\Sigma_K\Sigma_j\Sigma_J\Sigma_\delta g_{K,J}^{\delta} t^{-np}(-1)^j[n]_\delta$

$\bar{C}_K(\Theta)/([n]_K\bar{C}_K(I_p)k!j!)\int_{A>0}|A|^{m+n-p}\text{esp}(-A)\bar{C}_\delta(A/t)dA$

$= \bar{\Gamma}_p(m+n)/(\bar{\Gamma}_p(m))\ \text{esp}(-\Theta)\Sigma_k\Sigma_K\Sigma_j\Sigma_J\Sigma_\delta g_{K,J}^{\delta} t^{-(np+k+j)}$

$(-1)^j[n]_\delta[m+n]_\delta\bar{C}_K(\Theta)\bar{C}_\delta(I_p)/([n]_K\bar{C}_K(I_p)k!j!)$.

As die Laplace-inverse nou geneem word, word die verdeling van spZ verkry indien $\Sigma=I$. Aangesien spZ invariant is ten opsigte van die transformasies $A\to\Sigma^{1/2}A\Sigma^{1/2}$ en $B\to\Sigma^{1/2}B\Sigma^{1/2}$, kan die volgende stelling derhalwe geformuleer word.

Stelling 6.4.2

Indien $A\sim CW(\Sigma,m)$ en $B\sim CW(\Sigma,n,\Theta)$ word die verdelingsfunksie van $\text{sp}V^{-1} = S$ gedefinieer as

6.4.9 $f(S) = \bar{\Gamma}_p(m+n)/(\bar{\Gamma}_p(m))\ \text{esp}(-\Theta)\Sigma_k\Sigma_K\Sigma_j\Sigma_J\Sigma_\delta g_{K,J}^{\delta}(-1)^j$

$S^{np+k+j-1}[n]_\delta[m+n]_\delta\bar{C}_K(\Theta)\bar{C}_\delta(I_p)/([n]_K\Gamma(np+k+j)$

$\bar{C}_K(I_p)k!j!)$, $S>0$.

6.5 Die verdeling van V in terme van onafhanklike beta-verdelings van die tweede soort.

Die verdeling van V indien Θ van rang $r<p$ is, kan geskrywe word (6.2.7)

6.5.1 $f(V)\propto\text{esp}(-\Theta_r)|V|^{m-p}|I+V|^{-(m+n)}{}_1\bar{F}_1(m+n\ ;\ n\ ;\ \Theta_r(I+V_{1.2})^{-1})$.

Dit volg nou dat

$|I+V| = |I+V_{22}||I+V_{1.2}|$

en $|V| = |V_{22}||V_{1.2}-U\bar{U}'|$ waar

$U = V_{1.2}((I+V_{22})^{-1}V_{22}^{-1})^{1/2}$.

$J(V_{12}\to U) = |I+V_{22}|^r|V_{22}|^r$.

Laat/ ...

Laat $T = V_{1.2}^{-1/2}U$, $J(U \to T) = |V_{1.2}|^{p-r}$. 6.5.1 word nou

6.5.2 $f(V) \propto \exp(-\theta_r)|V_{1.2}|^{m-r}|I+V_{1.2}|^{-(m+n)}{}_1\bar{F}_1(m+n\ ;\ n\ ;$

$$\theta_r(I+V_{1.2})^{-1})|V_{22}|^{m-(p-r)}|I+V_{22}|^{-(m+n-r)}|I-T\bar{T}'|^{m-p},$$

d.i.

6.5.3 $f(V) = f_1(V_{1.2})\ f_2(V_{22})\ f_3(T)$

waar

6.5.4 $V_{1.2}(rxr) \sim C\beta_2(m,n,\theta_r)$,

6.5.5 $V_{22}(p\text{-}rxp\text{-}r) \sim C\beta_2(m,n-r)$ en

6.5.6 $f_3(T) \propto |I-T\bar{T}'|^{m-p}$.

Beskou die verdeling van $T(rxp\text{-}r)$.

Soortgelyk as in paragraaf 3.5 kan aangetoon word dat

$$|I-T\bar{T}'| = \prod_{i=1}^{p-r-1}(1-\bar{D}_i'D_i)$$

waar $D_i = D_{iR} + iD_{iI}$. Die jakobiaan van die transformasie

is $J(T \to D) = \prod_{i=1}^{p-r}(1-\bar{D}_i'D_i)^{p-r-i}$, waar $D(rxp\text{-}r) = (D_1,--,D_{p-r})$.

Omdat $\bar{D}_i'D_i = D_{iR}'D_{iR} + D_{iI}'D_{iI}$, laat $Q_i' = (D_{iR}',D_{iI}')$.

Derhalwe is $|I-\bar{T}T'| = \prod_{i=1}^{p-r-1}(1-Q_i'Q_i)$ en

$J(T \to Q) = \prod_{i=1}^{p-r}(1-Q_i'Q_i)^{p-r-i}$ waar $Q(2rxp\text{-}r) = (Q_1,--,Q_{p-r})$.

Stel

6.5.7 $$Q_i = Y_i = \begin{pmatrix} 1/(1+y_{i1})^{1/2} \\ y_{i1}^{1/2}/(1+y_{i1})^{1/2}(1+y_{i2})^{1/2} \\ \text{-------------------------} \\ y_{i1}^{1/2}\ldots y_{i,2r-1}^{1/2}/(1+y_{i1})^{1/2}\ldots(1+y_{i,2r})^{1/2} \end{pmatrix}.$$

$J(Q_i \to Y_i) = (-1/2)^{2r}\prod_{j=1}^{2r}y_{ij}^{r-j/2}/(1+y_{ij})^{(2r-j+3)/2}$.

Laat $Y = (Y_1,--,Y_{p-r})$, dan

$J(Q \to Y) = (-1/2)^{2r(p-r)}\prod_{i=1}^{p-r}\prod_{j=1}^{2r}y_{ij}^{r-j/2}/(1+y_{ij})^{(2r-j+3)/2}$.

Onder die substitusie 6.5.7 volg nou dat

$(1-Q_i'Q_i)/$ ...

$(1-Q_i{}'Q_i) = \prod_{j=1}^{2r} y_{ij}/(1+y_{ij})$ en derhalwe is

$$|I-\bar{T}'T| = \prod_{i=1}^{p-r}\prod_{j=1}^{2r} y_{ij}/(1+y_{ij}),$$

$$J(T\rightarrow Y) = (-1/2)^{2r(p-r)}\prod_{i=1}^{p-r}\prod_{j=1}^{2r} y_{ij}^{\,p-i-j/2}/(1+y_{ij})^{p-i-j/2\ +3/2}.$$

Die verdelingsfunksie van T kan dus geskrywe word

$$f_3(T)\propto\prod_{i=1}^{p-r}\prod_{j=1}^{2r} y_{ij}^{\,m-i-j/2}/(1+y_{ij})^{(2m-2i-j+3)/2},$$

d.i.

6.5.8 $$f_3(T) = \prod_{i=1}^{p-r}\prod_{j=1}^{2r} \beta_2(y_{ij}\ ;\ (2m-2i-j+2)/2,1/2).$$

Beskou die verdeling van V_{22}. Deur van 6.5.3 en 6.5.8 gebruik te maak, kan die verdeling van V_{22} (6.5.5) geskrywe word as die produk van onafhanklike beta-verdelings van die tweede soort (sien 3.5), d.i.

6.5.9 $$f_2(V_{22}) = \prod_{i=1}^{p-r}\beta_2(s_i\ ;\ m,n-r-i+1)\cdot \prod_{i=1}^{p-r-1}\prod_{j=1}^{2(p-r-i)} \beta_2(t_{ij}\ ;\ (2m-j)/2,1/2).$$

Derhalwe

6.5.10 $$f_2(V_{22})f_3(T) = \prod_{i=1}^{p-r}\beta_2(s_i\ ;\ m,n-r-i+1)\cdot \left[\prod_{i=1}^{p-r-1}\prod_{j=1}^{2(p-r-i)} \beta_2(t_{ij}\ ;\ (2m-j)/2,1/2)\right]\cdot \left[\prod_{i=1}^{p-r}\prod_{j=1}^{2r}\beta_2(y_{ij}\ ;\ (2m-2i-j+2)/2,1/2)\right].$$

Die produk van die laaste twee terme in vierkante hakies kan nou geskrywe word

$$\left[\prod_{i=1}^{p-r-1}\prod_{j=1}^{2(p-r-i)} \beta_2(t_{ij}\ ;\ (2m-j)/2,1/2)\right] \times \left[\prod_{i=1}^{p-r}\prod_{j=1}^{2r}\beta_2(y_{ij}\ ;\ (2m-2i-j+2)/2,1/2)\right]$$
$$= \prod_{i=r+1}^{p}\prod_{j=1}^{2(i-1)} \beta_2(z_{ij}\ ;\ (2m-2i+j+1)/2,1/2).$$

Dus, 6.5.10 kan geskrywe word

6.5.11 $$f_2(V_{22})f_3(T) = \prod_{i=r+1}^{p}\beta_2(s_i\ ;\ m,n-i+1) \prod_{j=1}^{2(i-1)} \beta_2(z_{ij}\ ;\ (2m-2i+j+1)/2,1/2).$$

Die/ ...

Die volgende stelling is nou bewys.

Stelling 6.5.1

Indien $V \sim C\beta_2(m,n,\Theta_r)$, $r<p$, kan die verdelingsfunksie van V geskrywe word

6.5.12 $$f(V) = C\beta_2(V_{1.2}(r\times r);\ m,n,\Theta_r)\prod_{i=r+1}^{p}\beta_2(s_i\ ;\ m,n-i+1)\cdot \prod_{j=1}^{2(i-1)}\beta_2(z_{ij}\ ;\ (2m-2i+j+1)/2,1/2).$$

Stelling 6.5.2

Indien $V \sim C\beta_2(m,n,\Theta_r)$, $r<p$, kan die verdelingsfunksie van $|V|$ geskrywe word

6.5.13 $$f(|V|) = f_1(|V_{1.2}|)\prod_{i=r+1}^{p}\beta_2(x_i\ ;\ m-i+1,n-i+1)$$

waar $V_{1.2} \sim C\beta_2(m,n,\Theta_r)$.

Bewys.

Indien Θ van rang $r<p$ is, volg uit 6.2.5 dat

$$\begin{aligned}
E(|V|)^h &= \bar{\Gamma}_p(m+h)\bar{\Gamma}_p(n-h)/(\bar{\Gamma}_p(m)\bar{\Gamma}_p(n))esp(-\Theta_r)\,{}_1\bar{F}_1(n-h\ ;\ n\ ;\ \Theta_r) \\
&= \bar{\Gamma}_r(m+h)\bar{\Gamma}_r(n-h)/(\bar{\Gamma}_r(m)\bar{\Gamma}_r(n))esp(-\Theta_r)\,{}_1\bar{F}_1(n-h\ ;\ n\ ;\ \Theta_r) \\
&\quad \prod_{i=r+1}^{p}[\Gamma(m+1-i+h)\Gamma(n+1-i-h)/(\Gamma(m+1-i)\Gamma(n+1-i))] \\
&= E|V_{1.2}|^h \prod_{i=r+1}^{p}E(x_i)^h
\end{aligned}$$

indien $x_i \sim \beta_2(m+1-i,n+1-i)$.

HOOFSTUK VII.

DIE KOMPLEKSE NIE-SENTRALE MEERVERANDERLIKE DIRICHLET-VERDELING.

7.1 Inleiding.

Laat $L_j = (\Sigma_{j=1}^q A_j+B)^{-1/2} A_j (\Sigma_{j=1}^q A_j+B)^{-1/2}$ en

$$V_j = B^{-1/2} A_j B^{-1/2} \quad (j=1,--,q)$$

waar A_j $(j=1,--,q)$ onafhanklike komplekse Wishart-veranderlikes is met m_j grade van vryheid respektiewelik en B 'n komplekse Wishart-veranderlike is met n grade van vryheid.
L_j en V_j is dus Hermities positief definiet. Die gesamentlike verdeling van die komplekse veranderlikes L_1, --, L_q word in paragraaf 7.2 gedefinieer in die volgende gevalle:
(i) $A_j \sim CW(\Sigma,m_j)$ en $B \sim CW(\Sigma,n,\Theta)$, Θ van rang $r \leq p$, en
(ii) $A_j \sim CW(\Sigma_1,m_j)$ en $B \sim CW(\Sigma_2,n)$.
'n Asimptotiese verdeling vir $\prod_j^q |L_j|$ word in 7.3 afgelei in beide die gevalle. In 7.4 word die gesamentlike verdeling van V_1, --, V_q gedefinieer in die geval $A_j \sim CW(I,m_j)$ en $B \sim CW(I,n,\Theta)$, Θ van rang $r \leq p$, en in 7.5 word die verdeling van van $\Sigma_j^q spV_j$ gevind.

7.2 Die komplekse nie-sentrale meerveranderlike dirichlet-verdeling van die eerste soort.

Stelling 7.2.1

Indien $A_j \sim CW(\Sigma,m_j)$ $(j=1,--,q)$ en $B \sim CW(\Sigma,n,\Theta)$, Θ van rang p, word die gesamentlike verdelingsfunksie van L_1, --, L_q gegee deur

7.2.1 $$f(L_1,--L_q) = (1/\bar{\Gamma}_p(n)\prod_j^q \bar{\Gamma}_p(m_j))|\Sigma|^{-(m+n)} esp(-\Theta)\prod_j^q |L_j|^{m_j-p}$$
$$|I-\Sigma_j L_j|^{n-p} \int_{T>0} esp(-\Sigma^{-1}T)|T|^{m+n-p} {}_0\bar{F}_1(n\ ;\ \Theta\Sigma^{-1}T^{1/2}.$$
$$(I-\Sigma_j L_j)T^{1/2})dT,$$

/ ...

waar $I-\Sigma_j L_j > 0$, $0 < L_j < 1$ en $m = \Sigma_j m_j$.

<u>Bewys</u>.

Die gesamentlike verdelingsfunksie van A_j $(j=1,--,q)$ en B word gegee deur

$$f(A_1,--,A_q,B) = (1/\bar{\Gamma}_p(n)\prod_j^q \bar{\Gamma}_p(m_j))|\Sigma|^{-(m+n)}\mathrm{esp}(-\Sigma^{-1}(\Sigma_j A_j+B))$$

$$\prod_j^q |A_j|^{m_j-p}|B|^{n-p}{}_0\bar{F}_1(n\ ;\ \theta\Sigma^{-1}B).$$

Laat $L_j = T^{-1/2}A_j T^{-1/2}$, $T = \Sigma_j A_j + B$.

$J(A_1,--,A_q,B \rightarrow L_1,--,L_q,T) = |T|^{pq}$. Integrasie met betrekking tot T in die gesamentlike verdeling van L_1, --, L_q en T lewer die stelling.

Die verdeling 7.2.1 is komplekse nie-sentrale meerveranderlike dirichlet-verdeling van die eerste soort van volle rang, d.i.

$$L_1,--,L_q \sim CD_1(m_1,--,m_q,n,\theta).$$

Indien $\theta = 0$, d.i. die sentrale geval, volg die verdeling maklik deur na T te integreer met behulp van 1.3.6. Die verdelingsfunksie word dan gegee deur (Troskie (1967))

7.2.2 $CD_1(L_1,--,L_q\ ;\ m_1,--,m_q,n)$

$$= \bar{\Gamma}_p(m+n)/(\bar{\Gamma}_p(n)\prod_j^q \bar{\Gamma}_p(m_j))\prod_j^q |L_j|^{m_j-p}|I-\Sigma_j L_j|^{n-p}.$$

Deur gebruik te maak van die integraal

7.2.3 $\int_0^I \cdots \int \prod_j |L_j|^{a_j-p}|I-\Sigma_j L_j|^{b-p}\ \bar{C}_K(R(I-\Sigma_j L_j))\ \prod_j dL_j$

$$= \bar{\Gamma}_p(b,K)\prod_j \bar{\Gamma}_p(a_j)/(\bar{\Gamma}_p(a+b,K))\ \bar{C}_K(R),\quad a = \Sigma_j a_j,$$

(hierdie integraal word bewys in 7.4), volg uit 7.2.1 dat

7.2.4 $E(\prod_j |L_j|^{h_j}) = \bar{\Gamma}_p(m+n)\prod_j \bar{\Gamma}_p(m_j+h_j)/(\bar{\Gamma}_p(m+n+h)\prod_j \bar{\Gamma}_p(m_j))$

$$\mathrm{esp}(-\theta)\,{}_1\bar{F}_1(m+n\ ;\ m+n+h\ ;\ \theta),\quad h = \Sigma_j h_j,$$

en

7.2.5/ ...

$$7.2.5 \quad E|I-\Sigma_j L_j|^h = \bar{\Gamma}_p(n+h)\bar{\Gamma}_p(m+n)/(\bar{\Gamma}_p(n)\bar{\Gamma}_p(m+n+h))\ \mathrm{esp}(-\Theta)$$

$$_2\bar{F}_2(n+h, m+n\ ;\ n, m+n+h\ ;\ \Theta).$$

Laasgenoemde resultaat is dieselfde as die van 5.2.3.

Die volgende afleiding word sonder om te bewys gegee aangesien die bewys daarvan dieselfde is as die van afleiding 5.2.1.

Afleiding 7.2.1

Indien $A_j \sim CW(I, m_j)$ $(j=1,--,q)$ en $B \sim CW(I, n, \Theta)$, Θ van rang $r<p$ en diagonaal, word die gesamentlike verdelingsfunksie van L_1, --, L_q gegee deur

$$7.2.6 \quad f(L_1,--,L_q) = (1/\bar{\Gamma}_p(n)\prod_j \bar{\Gamma}_p(m_j))\mathrm{esp}(-\Theta_r)\prod_j |L_j|^{m_j-p}$$

$$|I-\Sigma_j L_j|^{n-p}\int_{T_{11}>0}\mathrm{esp}(-T_{11})|T_{11}|^{m+n-r}$$

$$_0\bar{F}_1(n\ ;\ \Theta_r T_{11}^{1/2}(I-\Sigma_j L_{11j})T_{11}^{1/2})dT_{11}$$

waar $L_j = \begin{pmatrix} L_{11j} & L_{12j} \\ L_{21j} & L_{22j} \end{pmatrix}$ sodanig dat L_{11j} van orde r is.

Hierdie verdeling is 'n komplekse nie-sentrale meerveranderlike dirichlet-verdeling van die eerste soort van rang r. Indien r=1, d.i. die lineêre geval, word die verdeling (Troskie (1967))

$$\bar{\Gamma}_p(m+n)/(\bar{\Gamma}_p(n)\prod_j \bar{\Gamma}_p(m_j))e^{-\lambda}\prod_j |L_j|^{m_j-p}|I-\Sigma_j L_j|^{n-p}$$

$$_1\bar{F}_1(m+n\ ;\ n\ ;\ \lambda(1-\Sigma_j l_{11j}),\quad \lambda = \Theta_1.$$

Die momente van $\prod_j |L_j|$ en $|I-\Sigma_j L_j|$ kan sondermeer uit 7.2.4 en 7.2.5 respektiewelik gevind word indien Θ van rang $r<p$ is.

Stelling 7.2.2

Indien $A_j \sim CW(\Sigma_1, m_j)$ $(j=1,--,q)$ en $B \sim CW(\Sigma_2, n)$ word die gesamentlike verdelingsfunksie van L_1, --, L_q gegee deur

7.2.7/ ...

7.2.7 $f(L_1,--,L_q) = (1/\bar{\Gamma}_p(n)\overline{\prod}_j\bar{\Gamma}_p(m_j))|\Sigma_1|^{-m}|\Sigma_2|^{-n}\overline{\prod}_j|L_j|^{m_j-p}$

$$|I-\Sigma_jL_j|^{n-p}\int_{T>0}\text{esp}(-\Sigma_2^{-1}T)|T|^{m+n-p}{}_0\bar{F}_0(-T^{1/2}(\Sigma_1^{-1}-\Sigma_2^{-1})\cdot T^{1/2}\Sigma_jL_j)dT.$$

Bewys.

Die gesamentlike verdelingsfunksie van A_1, --, A_q en B word gegee deur

$$f(A_1,--,A_q,B) = (1/\bar{\Gamma}_p(n)\overline{\prod}_j\bar{\Gamma}_p(m_j))|\Sigma_1|^{-m}|\Sigma_2|^{-n}\overline{\prod}_j|A_j|^{m_j-p}$$

$$|B|^{n-p}\text{esp}(-(\Sigma_2^{-1}B+\Sigma_1^{-1}\Sigma_jA_j)), \quad m=\Sigma_jm_j.$$

Stel $L_j = T^{-1/2}A_jT^{-1/2}$, $T = \Sigma_jA_j+B$. Die eksponent term word onder die substitusie

$$\text{esp}(-(\Sigma_2^{-1}B+\Sigma_1^{-1}\Sigma_jA_j))$$

$$= \text{esp}(-\Sigma_2^{-1}T)\ \text{esp}(-(\Sigma_1^{-1}-\Sigma_2^{-1})T^{1/2}\Sigma_jL_jT^{1/2})$$

$$= \text{esp}(-\Sigma_2^{-1}T)\ {}_0\bar{F}_0(-(\Sigma_1^{-1}-\Sigma_2^{-1})T^{1/2}\Sigma_jL_jT^{1/2}).$$

Integrasie na T in die gesamentlike verdeling van L_1, --, L_q en T lewer die stelling. Die verdeling word ook geklassifiseer as 'n komplekse nie-sentrale meerveranderlike dirichlet-verdeling van die eerste soort.

7.3 'n Asimptotiese verdeling vir $\overline{\prod}_j|L_j|$.

Met behulp van 2.3.1 kan 'n asimptotiese verdeling vir $\overline{\prod}_j|L_j|$ gevind word indien $A_j\sim CW(\Sigma,m_j)$ $(j=1,--,q)$ en $B\sim CW(\Sigma,n,\Theta)$, Θ van rang $r\leq p$.

Stelling 7.3.1

Indien $A_h\sim CW(\Sigma,m_h)$ $(h=1,--,q)$ en $B\sim CW(\Sigma,n,\Theta)$, Θ van rang $r\leq p$, word die asimptotiese verdeling van $\overline{\prod}_h|L_h|$ gegee deur

7.3.1 $P(-2\rho\Sigma_{h=1}^{q}\log|L_h| \leq z^+) = \Sigma_{k=0}P(\chi^2_{f_k}\leq z)P(k) + \text{esp}(-\Theta_r)$

$$\Sigma_k\Sigma_K(P(\chi^2_{f_k+2}\leq z)-P(\chi^2_{f_k}\leq z))\omega_{1k}\bar{C}_K(\Theta_r)/k! + O(m^{-2})$$

waar/ ...

waar $z^{+} = z - 2\rho p(\Sigma_h m_h \log m_h - m\log m)$, $f_k = p^2(q-1)+2np+2k$,

$\rho = 1 + (\frac{n}{m}(n-p)-(\Sigma_h(1/m_h)-1/m)(2p^2-1)/6)/(p(q-1)+2n)$,

$\omega_{1k} = (-1/\rho)((1-\rho+n/m+1/2m)k + (\Sigma_j^r K_j^2 - 2\Sigma_j^r K_j j)/2m)$ en

$P(k) = \mathrm{esp}(-\theta_r)(\mathrm{sp}\theta_r)^k/k!$.

<u>Bewys</u>.

Laat $W = (m^{mp}/\overline{\prod}_h m_h^{pm_h})\overline{\prod}_h^q |L_h|^{m_h}$ en $M = -2\log W$. Volgens 7.2.4 kan die karakteristieke funksie van ρM geskrywe word

$$7.3.2 \quad \phi_{\rho M}(t) = E(W^{-2it\rho})$$

$$= \mathrm{esp}(-\theta)\Sigma_k\Sigma_K[(m^{mp}/\overline{\prod}_h m_h^{pm_h})^{-2it\rho}\overline{\Gamma}_p(m+n,K)$$

$$\overline{\prod}_h\overline{\Gamma}_p(m_h(1-2it\rho))/(\overline{\prod}_h\overline{\Gamma}_p(m_h)\overline{\Gamma}_p(m(1-2it\rho)+n,K)]$$

$$\overline{C}_K(\theta)/k!\ .$$

Die term tussen vierkante hakies is van die vorm 2.3.1 met $x_h = m_h$, $x = m$, $\nu_j = 1-j$, $\gamma_j = n+K_j$. Vervang die term met 2.3.2 en ignoreer $O(m^{-2})$. 7.3.2 kan derhalwe geskrywe word

$$7.3.3 \quad \phi(t) = \mathrm{esp}(-\theta)\Sigma_k\Sigma_K(1-2it)^{-f_k/2}(1+T_{1k}(t))\overline{C}_K(\theta)/k! + O(m^{-2}),$$

waar $f_k = p^2(q-1)+2np+2k$ en

$$7.3.4 \quad \omega_{1k} = (-1/2\rho)((1-\rho)f_k + n(p(n-p)+2k)/m - (\Sigma_h(1/m_h) -1/m)p(2p^2-1)/6 + (\Sigma_j K_j^2 - 2\Sigma_j K_j j)/m + k/m).$$

Laat $\omega_{10} = 0$ en los op vir ρ. Dus

$$\rho = 1 + (n(n-p)/m - (\Sigma_h(1/m_h)-1/m)(2p^2-1)/6)/(p(q-1)+2n)$$

en ω_{1k} word nou

$$\omega_{1k} = (-1/\rho)((1-\rho+n/m+1/2m)k + (\Sigma_j K_j^2 - 2\Sigma_j K_j j)/2m).$$

Deur die inverse van 7.3.3 te neem, is die stelling bewys indien θ van rang p is. Indien θ egter van rang $r \leq p$ is, word θ deur θ_r vervang en K bestaan dan uit net r komponente.

Indien q=1 reduseer 7.3.1 na 5.3.1.

7.4 Die komplekse nie-sentrale meerveranderlike dirichlet-verdeling van die tweede soort.

Stelling 7.4.1

Indien $A_j \sim CW(I,m_j)$ $(j=1,--,q)$ en $B \sim CW(I,n,\Theta)$, Θ van rang p, word die gesamentlike verdelingsfunksie van V_1, --, V_q gegee deur

7.4.1 $CD_2(V_1,--,V_q \,;\, m_1,--,m_q,n,\Theta)$

$$= \bar{\Gamma}_p(m+n)/(\overline{\prod}_j \bar{\Gamma}_p(m_j)\bar{\Gamma}_p(n)) \operatorname{esp}(-\Theta)\overline{\prod}_j |V_j|^{m_j-p}$$

$$|I+\Sigma_j V_j|^{-(m+n)} {}_1\bar{F}_1(m+n \,;\, n \,;\, \Theta(I+\Sigma_j V_j)^{-1}),\ V_j>0.$$

Bewys.

Die gesamentlike verdelingsfunksie van A_1, --, A_q en B word gegee deur

7.4.2 $f(A_1,--,A_q,B) = (1/\bar{\Gamma}_p(n)\overline{\prod}_j \bar{\Gamma}_p(m_j)) \operatorname{esp}(-\Theta)\overline{\prod}_j |A_j|^{m_j-p}$

$$|B|^{n-p} \operatorname{esp}(-(\Sigma_j A_j+B))_0\bar{F}_1(n \,;\, \Theta B).$$

Stel $V_j = B^{-1/2}A_jB^{-1/2}$, $J(A_1,--,A_q,B \to V_1,--,V_q,B) = |B|^{pq}$, en integreer na B met behulp van 1.3.8. Dit bewys die stelling.

Die verdeling 7.4.1 is dan 'n komplekse nie-sentrale meerveranderlike dirichlet-verdeling van die tweede soort van volle rang.

Indien $\Theta = 0$ word die verdeling (Troskie (1967))

$$CD_2(V_1,--,V_q \,;\, m_1,--,m_q,n) = \bar{\Gamma}_p(m+n)/(\bar{\Gamma}_p(n)\overline{\prod}_j \bar{\Gamma}_p(m_j))$$

$$\overline{\prod}_j |V_j|^{m_j-p}|I+\Sigma_j V_j|^{-(m+n)}.$$

Uit 7.4.1 volg dat

7.4.3 $\int_{V_j>0}\cdots\int \overline{\prod}_j |V_j|^{m_j-p}|I+\Sigma_j V_j|^{-(m+n)}\bar{C}_K(\Theta(I+\Sigma_j V_j)^{-1})\overline{\prod}_j dV_j$

$$= \bar{\Gamma}_p(n,K)\overline{\prod}_j \bar{\Gamma}_p(m_j)/(\bar{\Gamma}_p(m+n,K))\ \bar{C}_K(\Theta)$$

en derhalwe is

7.4.4/ ...

7.4.4 $E\prod_j |V_j|^{h_j} = \bar{\Gamma}_p(n-h)\prod_j \bar{\Gamma}_p(m_j+h_j)/(\bar{\Gamma}_p(n)\prod_j \bar{\Gamma}_p(m_j))\mathrm{esp}(-\theta)$

$${}_1\bar{F}_1(n-h\ ;\ n\ ;\ \theta), \quad h=\Sigma_j h_j,$$

en

7.4.5 $E|I+\Sigma_j V_j|^{-h} = \bar{\Gamma}_p(n+h)\bar{\Gamma}_p(m+n)/(\bar{\Gamma}_p(n)\bar{\Gamma}_p(m+n+h))\ \mathrm{esp}(-\theta)$

$${}_2\bar{F}_2(n+h,m+n\ ;\ m+n+h,n\ ;\ \theta).$$

Laasgenoemde resultaat is dieselfde as die van 6.2.6.

Indien die substitusie $V_j = (I-\Sigma_j L_j)^{-1/2} L_j (I-\Sigma_j L_j)^{-1/2}$ in 7.4.3 uitgevoer word met

$$J(V_1,--,V_q \rightarrow L_1,--,L_q)$$

$$= CD_1(L_1,--,L_q\ ;\ m_1,--,m_q,n)/CD_2(V_1,--,V_q\ ;\ m_1,--,m_q,n)$$

$$= |I-\Sigma_j L_j|^{-p(q+1)},$$

dan volg die integraal

7.4.6 $\int_0^I \!\!-\!\!\int \prod_j |L_j|^{m_j-p}|I-\Sigma_j L_j|^{n-p}\bar{C}_K(\theta(I-\Sigma_j L_j))\prod_j dL_j$

$$= \bar{\Gamma}_p(n,K)\prod_j \bar{\Gamma}_p(m_j)/(\bar{\Gamma}_p(m+n,K))\ \bar{C}_K(\theta)$$

soos aangegee in 7.2.4.

Dit mag net genoem word dat onder die substitusie $W_1 = V_1$, $W_2 = V_1+V_2$, --, $W_q = \Sigma_j^q V_j$ die volgende verdeling verkry word:

7.4.7 $f(W_1,--,W_q) = \bar{\Gamma}_p(m+n)/(\bar{\Gamma}_p(n)\prod_j \bar{\Gamma}_p(m_j))\ \mathrm{esp}(-\theta)$

$$\prod_j^q |W_j-W_{j-1}|^{m_j-p}|I+W_q|^{-(m+n)}\,{}_1\bar{F}_1(m+n\ ;\ n\ ;\ \theta(I+W_q)^{-1}),$$

$$W_j>0.$$

Na analogie van die bekende eenveranderlike verdeling (Wilks (1962)), sal hierdie verdeling die komplekse nie-sentrale meerveranderlike geordende dirichlet-verdeling van volle rang wees.

<u>Afleiding 7.4.1</u>

Indien $A_j \sim CW(I,m_j)$ $(j=1,--,q)$ en $B\sim CW(I,n,\theta)$, θ diagonaal en van rang $r<p$, word die gesamentlike verdelingsfunk-

sie/ ...

sie van V_1, --, V_q gegee deur

7.4.8 $CD_2(V_1,--,V_q\ ;\ m_1,--,m_q,n,\Theta_r)$

$$= \overline{\Gamma}_p(m+n)/(\overline{\Gamma}_p(n)\prod_j\overline{\Gamma}_p(m_j))\ \mathrm{esp}(-\Theta_r)\prod_j|V_j|^{m_j-p}$$

$$|I+\Sigma_jV_j|^{-(m+n)}\,{}_1\overline{F}_1(m+n\ ;\ n\ ;\ \Theta_r(I+N_{1.2})^{-1})$$

waar $N_{1.2} = N_{11}-N_{12}(I+N_{22})^{-1}N_{21}$ en

$$N = \begin{pmatrix} N_{11} & N_{12} \\ N_{21} & N_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Sigma_jV_{11j} & \Sigma_jV_{12j} \\ \Sigma_jV_{21j} & \Sigma_jV_{22j} \end{pmatrix}$$

sodanig dat N_{11} van orde r is.

Bewys.

Deur van 1.2.20 gebruik te maak volg die afleiding sondermeer.

Hierdie verdeling is 'n komplekse nie-sentrale meerveranderlike dirichlet-verdeling van die tweede soort van rang r. Indien r=1, d.i. die lineêre geval, is die verdeling deur Troskie (1967) gedefinieer.

7.5 Die verdeling van $\mathrm{sp}\Sigma_j^qV_j$.

Stelling 7.5.1

Indien $A_j \sim CW(\Sigma,m_j)$ (j=1,--,q) en $B \sim CW(\Sigma,n,\Theta)$, Θ van rang p, word die verdelingsfunksie van $P = \mathrm{sp}\Sigma_jV_j$ gegee deur

7.5.1 $$f(P) = \overline{\Gamma}_p(m+n)/(\overline{\Gamma}_p(n)\Gamma(mp))\ \mathrm{esp}(-\Theta)\Sigma_k\Sigma_K\Sigma_j^{\infty}\Sigma_J\Sigma_\delta g_{K,J}^{\delta}(-1)^j$$

$$P^{mp+j-1}[m]_J[m+n]_\delta\overline{C}_K(\Theta)\overline{C}_\delta(I_p)/([n]_K(mp)_j\overline{C}_K(I_p)k!j!),$$

$$P>0.$$

Bewys.

Onder die substitusie $V_j = B^{-1/2}A_jB^{-1/2}$ (j=1,--,q), word die Laplace-getransformeerde funksie van $\mathrm{sp}\Sigma_jV_j$ gegee deur (sien 7.4.2)

g(t)/ ...

$$g(t) = E(\mathrm{esp}(-t\Sigma_j V_j))$$

$$= (1/\overline{\Gamma}_p(n)\prod_j \overline{\Gamma}_p(m_j))\ \mathrm{esp}(-\Theta)\int_{\overline{V_j>0}}\int\int_{B>0}\prod_j |V_j|^{m_j-p}$$

$$|B|^{m+n-p}\mathrm{esp}(-B)\ \mathrm{esp}(-(B+tI)\Sigma_j V_j)\,{}_0\overline{F}_1(n\ ;\ \Theta B)dB\prod_j dV_j .$$

Deur na V_1, --, V_q agtereenvolgens te integreer volgens 1.3.6 is

$$g(t) = (1/\overline{\Gamma}_p(n))\ \mathrm{esp}(-\Theta)\int_{B>0}\mathrm{esp}(-B)|B|^{m+n-p}|B+tI|^{-m}$$

$${}_0\overline{F}_1(n\ ;\ \Theta B)dB.$$

Dit is dieselfde voorskrif soos gegee in 6.4.1 met $\Sigma=I$. Aangesien $\mathrm{sp}\Sigma_j V_j$ invariant is ten opsigte van die transformasies $A_j \to \Sigma^{1/2}A_j\Sigma^{1/2}$ ($j=1,--,q$) en $B \to \Sigma^{1/2}B\Sigma^{1/2}$, is die verdeling dieselfde as dié gegee in 6.4.5 en dus die stelling.

HOOFSTUK VIII.

SEKERE ASPEKTE WAT BETREF DIE ALGEMENE MEERVOUDIGE KORRELASIE MATRIKS R.

8.1 Inleiding.

Indien die vektor $X = \begin{pmatrix} X^{(1)} \\ X^{(2)} \end{pmatrix} \begin{matrix} (q) \\ (r) \end{matrix}$ (reëel of kompleks)

verdeel is normaal met kovariansie matriks $\Sigma = \begin{pmatrix} \Sigma_{11}(qxq) & \Sigma_{12} \\ \Sigma_{21} & \Sigma_{22}(rxr) \end{pmatrix}$

en 'n steekproef van N waarnemings word op X gemaak, dan word die algemene meervoudige korrelasie matriks R(qxq) sodanig gedefinieer (Khatri (1964)(b)) dat dit 'n maat van verwantskap tussen die twee stelle waarnemings op $X^{(1)}$ en $X^{(2)}$ is. Die verdeling van R is ondersoek en gedefinieer deur Troskie (1968) en Srivastava (1968). In hierdie hoofstuk word asimptotiese verdelings vir $|R|$ en $|I-R|$ afgelei en die eksakte verdeling van die grootste wortel (kwadraat van die grootste kanoniese korrelasie koëffisiënt) van R word gedefinieer. In 8.2 word die aspekte beskou vir die reële geval en in 8.3 vir die komplekse geval.

Die volgende resultate is nodig vir die aflei van die verdelings: Laat n = N-1.

Reële geval.

8.1.1 $E|R|^h = \Gamma_q(n/2)\Gamma_q(r/2 +h)/(\Gamma_q(n/2 +h)\Gamma_q(r/2))|I-P|^{n/2}$
$${}_3F_2(n/2,n/2,r/2 +h \; ; \; n/2 +h,r/2 \; ; \; P)$$

8.1.2 $E|I-R|^h = \Gamma_q(n/2)\Gamma_q(n/2 -r/2 +h)/(\Gamma_q(n/2 +h)\Gamma_q((n-r)/2))$
$${}_2F_1(n/2,n/2 \; ; \; n/2 +h \; ; \; P)$$
(Troskie (1968))

waar $P = \Sigma_{11}^{-1/2}\Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}\Sigma_{21}\Sigma_{11}^{-1/2}$ die populasie meervoudige korrelsie matriks is (R is die maksimum aanneemlike beramer P).

Die/ ...

Die gesamentlike verdelingsfunksie van die karakteristieke wortels $1>r_1^2>\text{--}>r_q^2>0$ van R word gegee deur (Constantine (1963))

8.1.3 $f(\Delta) = \pi^{q^2/2}\Gamma_q(n/2)/(\Gamma_q(q/2)\Gamma_q((n-r)/2)\Gamma_q(r/2))|I-P|^{n/2}$

$$|\Delta|^{(r-q-1)/2}|I-\Delta|^{(n-r-q-1)/2}\ \alpha_q(\Delta)$$

$$_2F_1(n/2,n/2\ ;\ r/2\ ;\ P,\Delta)$$

waar $\Delta = \text{diag}(r_1^2,\text{--},r_q^2)$. r_i^2 $(i=1,\text{--},q)$ is ook die i-de kanoniese korrelasie koëffisiënt gekwadreer.

Komplekse geval.

8.1.4 $E|R|^h = \overline{\Gamma}_q(n)\overline{\Gamma}_q(r+h)/(\overline{\Gamma}_q(n+h)\overline{\Gamma}_q(r))|I-P|^n$

$$_3\overline{F}_2(n,n,r+h\ ;\ n+h,r\ ;\ P)$$

8.1.5 $E|I-R|^h = \overline{\Gamma}_q(n)\overline{\Gamma}_q(n-r+h)/(\overline{\Gamma}_q(n+h)\overline{\Gamma}_q(n-r))\ |I-P|^n$

$$_2\overline{F}_1(n,n\ ;\ n+h\ ;\ P)$$ (Troskie (1968))

8.1.6 $f(\Delta) = \pi^{q(q-1)}\overline{\Gamma}_q(n)/(\overline{\Gamma}_q(q)\overline{\Gamma}_q(n-r)\overline{\Gamma}_q(r))\ |I-P|^n\ \overline{\alpha}_q(\Delta)$

$$|\Delta|^{r-q}|I-\Delta|^{n-r-q}\,{}_2\overline{F}_1(n,n\ ;\ r\ ;\ P,\Delta)$$ (James (1964)).

8.2 Die reële geval.

Stelling 8.2.1

Die asimptotiese verdeling van $|R|$ word gegee deur

8.2.1 $P(-a\log|R| \leq z) = P(\chi_f^2\leq z) + |I-P|^{n/2}(P(\chi_{f+2}^2\leq z)-$

$$P(\chi_f^2\leq z))\Sigma_k\Sigma_K(n/2)_K\omega_{1k}C_K(P)/k! + O(r^{-2})$$

waar $a=r\rho$, $\rho=1 + (n-r-q-1)/2r$, $f=(n-r)q$ en

$\omega_{1k}=(-1/2\rho)((n-r)((n-r)q/2 -q^2/2 +2K -q/2)/r + (1-\rho)f)$.

Bewys.

Stel $W = |R|^{r/2}$ en $M = -2\log W$. Volgens 8.1.1 kan die karakteristieke funksie van ρM geskrywe word

8.2.2 $\phi_{\rho M}(t) = E|R|^{-it\rho r}$

$$= |I-P|^{n/2}\Sigma_k\Sigma_K(n/2)_K[\Gamma_q(n/2,K)\Gamma_q(r(1-2it\rho)/2,K)/$$

$$(\Gamma_q(r/2,K)\Gamma_q(r(1-2it\rho)/2 +(n-r)/2,K)]C_K(P)/k!.$$

Die term tussen vierkante hakies is van die vorm 2.3.7 met $x = r/2$, $\nu_j = (1-j)/2 +K_j$ en $\gamma_j = (n-r)/2$. Die resultaat is soortgelyk as die van 2.3.47, en dus die stelling.

Stelling 8.2.2

Die asimptotiese verdeling van $|I-R|$ word gegee deur

8.2.3 $P(-a\log|I-R| \leq z) = |I-P|^{n/2}\Sigma_k\Sigma_K(P(\chi^2_{f_k+2}\leq z)-P(\chi^2_{f_k}\leq z))$

$$(n/2)_K\omega_{1k}C_K(P)/k! + |I-P|^{n/2}\Sigma_k\Sigma_K P(\chi^2_{f_k}\leq z)(n/2)_K$$

$$C_K(P)/k! +O(n-r)^{-2}$$

waar $a=(n-r)\rho$, $f_k=rq+2k$, $\rho=1 + (r-q-1)/2(n-r)$ en $\omega_{1k}=(-1/\rho)((1-\rho+r/(n-r))k + (\Sigma_jK_j{}^2-\Sigma_jK_jj)/(n-r))$.

Bewys.

Stel $V = |I-R|^{(n-r)/2}$ en $M = -2\log V$. Volgens 8.1.2 kan die karakteristieke funksie van ρM geskrywe word

$$\phi_{\rho M}(t) = E|I-R|^{-it\rho(n-r)}$$

$$= |I-P|^{n/2}\Sigma_k\Sigma_K(n/2)_K[\Gamma_q(n/2,K)\Gamma_q((n-r)(1-2it\rho)/2)/$$

$$(\Gamma_q((n-r)/2)\Gamma_q((n-r)(1-2it\rho)/2 +r/2,K))]C_K(P)/k! .$$

Die term tussen vierkante hakies is van die vorm 2.3.7 met $x = (n-r)/2$, $\nu_j = (1-j)/2$ en $\gamma_j = r/2 +K_j$. Die stelling volg dus na analogie van stelling 2.3.6.

Indien P van rang $s<q$ is, kan hierdie asimptotiese verdelings sonder meer omskrywe word, maar indien $s=1$, d.i. die lineêre geval, vereenvoudig die verdelings heelwat.

'n Ortogonale matriks C kan gevind word sodanig dat

$$CPC' = \begin{pmatrix} \rho_1^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

waar/ ...

waar ρ_1^2 die enigste wortel van P is. Die volgende afleidings kan nou uit die twee stellings gemaak word:

Afleiding 8.2.1

Indien P van rang een is, kan die asimptotiese verdeling van $|I-R|$ geskrywe word

$$8.2.4 \quad P(-a\log|I-R| \leq z) = \Sigma_k P(\chi^2_{f_k} \leq z)P(k) + \Sigma_k(P(\chi^2_{f_k+2} \leq z) - P(\chi^2_{f_k} \leq z))\omega_{1k}P(k) + O(n-r)^{-2}$$

waar $P(k) = (1-\rho_1^2)^{n/2}(n/2)_k\rho_1^{2k}$, $\omega_{1k}=(-1/\rho)((1-\rho+r/(n-r))k + (k^2-k)/(n-r))$ en die ander parameters gegee word in stelling 8.2.2.

Afleiding 8.2.2

Indien P van rang een is, kan die asimptotiese verdeling van $|R|$ geskrywe word

$$8.2.5 \quad P(-a\log|R| \leq z) = P(\chi^2_f \leq z) + O(r^{-2})$$

waar $a = r + 2d/q + (n-r-q-1)/2$, $f = (n-r)q$ en $d = (1-\rho_1^2)^{-1}\cdot\rho_1^2 n/2$.

Bewys.

Uit stelling 8.2.1 volg dat

$\omega_{1k} = (-1/2\rho)((n-r)(nq-rq-q^2+4k-q)/4r + (1-\rho)f)$.

Laat $\omega_{1d}=0$ (d enige heelgetal) en los op vir ρ, d.i.

$$8.2.6 \quad \rho = 1 + 2d/rq + (n-r-q-1)/2r.$$

ω_{1k} word nou

$$8.2.7 \quad \omega_{1k} = (d-k)/r\rho = (d-k)/a, \quad a=r\rho.$$

Die tweede term in 8.2.1 kan derhalwe geskrywe word

$$8.2.8 \quad (1-\rho_1^2)^{n/2}(P(\chi^2_{f+2} \leq z)-P(\chi^2_f \leq z))\Sigma_k(n/2)_k\omega_{1k}\rho_1^{2k}/k!$$

$$= (P(\chi^2_{f+2} \leq z)-P(\chi^2_f \leq z))(d - (1-\rho_1^2)^{n/2}\Sigma_k k(n/2)_k\rho_1^{2k}/k!)/a.$$

Maar $\Sigma_k k(n/2)_k\rho_1^{2k}/k!$

$$= (n/2)\rho_1^2(1-\rho_1^2)^{-1}(1-\rho_1^2)^{-n/2}$$

en/ ...

en dus kan die term 8.2.8 nul gemaak word deur

$$d = n\rho_1^{\,2}(1-\rho_1^{\,2})^{-1}/2$$

te neem. Dit bewys die afleiding.

Stelling 8.2.3

Die verdelingsfunksie van $r_1^{\,2}$, die kwadraat van die grootste kanoniese korrelasie koëffisiënt, word gedefinieer as

8.2.9 $$f(r_1^{\,2}) = \Gamma_q(n/2)\Gamma_q((q+1)/2)/(\Gamma_q((n-r)/2)\Gamma_q((r+q+1)/2))$$
$$|I-P|^{n/2}\Sigma_k\Sigma_K\Sigma_j\Sigma_J\Sigma_\delta g_{K,J}^{\delta} r_1^{\,2(rq/2\ +k+j-1)}(rq/2\ +k+j)$$
$$(n/2)_K(n/2)_K(r/2)_\delta((r-n+q+1)/2)_J C_K(P)C_\delta(I_q)/$$
$$((r/2)_K((r+q+1)/2)_\delta C_K(I_q)k!j!),\quad 0<r_1^{\,2}<1.$$

Bewys.

Laat $z_{i-1} = r_i^{\,2}/r_1^{\,2}$, $i=1,--,q-1$,

$Z = \mathrm{diag}(z_1,--,z_{q-1})$

$Z^{+} = \mathrm{diag}(1,z_1,--,z_{q-1})$.

$J(\Delta\to r_1^{\,2},Z) = r_1^{\,2(q-1)}$, $|\Delta| = r_1^{\,2q}|Z|$, $\alpha_q(\Delta) = r_1^{\,q(q-1)}|I-Z|\cdot$
$\alpha_{q-1}(Z)$, $|I-\Delta|^{(n-r-q-1)/2} = \Sigma_j\Sigma_J((q-n+r+1)/2)_J C_J(r_1^{\,2}Z^{+})$.

Die voorskrif van die gesamentlike verdelingsfunksie van $r_1^{\,2}$ en Z is

8.2.10 $$f(r_1^{\,2},Z) = \pi^{q^2/2}\Gamma_q(n/2)/(\Gamma_q(q/2)\Gamma_q(r/2)\Gamma_q((n-r)/2))$$
$$|I-P|^{n/2} r_1^{\,2(rq/2\ -1)}|Z|^{(r-q-1)/2}|I-Z|$$
$$\alpha_{q-1}(Z)\Sigma_k\Sigma_K\Sigma_j\Sigma_J(n/2)_K(n/2)_K((q-n+r+1)/2)_J$$
$$C_K(P)C_K(r_1^{\,2}Z^{+})C_J(r_1^{\,2}Z^{+})/((r/2)_K C_K(I_p)k!j!).$$

Integreer na Z deur gebruik te maak van 2.4.11 en die stelling volg.

Uit 8.2.9 volg derhalwe

8.2.11 $P(r_1^{\,2} \leq z) = \int_0^z f(r_1^{\,2})dr_1^{\,2}$

$$= \Gamma_q(n/2)\Gamma_q((q+1)/2)/(\Gamma_q((n-r)/2)\Gamma_q((r+q+1)/2))$$

$$|I-P|^{n/2}\Sigma_k\Sigma_K\Sigma_j\Sigma_J\Sigma_\delta g_{K,J}^{\delta} z^{rq/2\ +k+j}(n/2)_K(n/2)_K(r/2)_\delta$$

$$((q-n+r+1)/2)_J C_K(P)C_\delta(I_q)/((r/2)_K((r+q+1)/2)_\delta$$

$$C_K(I_q)k!j!).$$

In die besonder as P van rang een is, d.i. die lineêre geval

8.2.12 $P(r_1^{\,2} \leq z) = \Gamma_q(n/2)\Gamma_q((q+1)/2)/(\Gamma_q((n-r)/2)\Gamma_q((r+q+1)/2))$

$$(1-\rho_1^{\,2})^{n/2}\Sigma_k\Sigma_j\Sigma_J\Sigma_\delta g_{K,J}^{\delta} z^{rq/2\ +k+j}(n/2)_k(n/2)_k(r/2)_\delta$$

$$((q-n+r+1)/2)_J \rho_1^{\,2k} C_\delta(I_q)/((r/2)_k((r+q+1)/2)_\delta$$

$$C_{(k)}(I_q)k!j!).$$

Stel hierin q=1, dan

8.2.13 $P(r_1^{\,2} \leq z) = \Gamma(n/2)/(\Gamma((n-r)/2)\Gamma((r+2)/2))\ (1-\rho_1^{\,2})^{n/2}$

$$\Sigma_k\Sigma_j z^{r/2\ +k+j}(n/2)_k(n/2)_k(r/2)_{k+j}((2-n+r)/2)_j$$

$$\rho_1^{\,2k}/((r/2)_k((r+2)/2)_{k+j}k!j!).$$

Dit is die nie-sentrale verdeling van die kwadraat van die bekende meervoudige korrelasie koëffisiënt (sien Anderson (1958), bls. 95).

8.3 Komplekse geval.

Stelling 8.3.1

Die asimptotiese verdeling van $|R|$ word gegee deur

8.3.1 $P(-a\log|R| \leq z) = P(\chi_f^2 \leq z) + |I-P|^n(P(\chi_{f+2}^2 \leq z)-P(\chi_f^2 \leq z))$

$$\Sigma_k\Sigma_K[n]_K\omega_{1k}\overline{C}_K(P)/k! + O(r^{-2})$$

waar $a = 2r\rho$, $f = 2(n-r)q$, $\rho = 1 + (n-r-q)/2r$ en

$\omega_{1k} = (-1/2\rho)(q(n-r)(n-r-q)/r + 2k(n-r)/r + (1-\rho)f).$

Bewys/ ...

Bewys.

Volgens 8.1.4 kan die karakteristieke funksie van ρM, $M = -2\log|R|^r$, geskrywe word

8.3.2 $\phi_{\rho M}(t) = |I-P|^n \Sigma_k \Sigma_K [n]_K [\overline{\Gamma}_q(n,K)\overline{\Gamma}_q(r(1-2it\rho),K)/(\overline{\Gamma}_q(r,K)$

$$\overline{\Gamma}_q(r(1-2it\rho)+n-r,K))]\overline{C}_K(P)/k!.$$

Die term tussen vierkante hakies is van die vorm 2.3.7 met $x = r$, $\nu_j = 1-j+K_j$ en $\gamma_j = n-r$. Die stelling volg dus na analogie van stelling 5.3.3.

Afleiding 8.3.1

Indien die rang van P een is, word die asimptotiese verdeling van $|R|$ gegee deur

8.3.3 $P(-a\log|R| \leq z) = P(\chi^2_f \leq z) + O(r^{-2})$

waar $a = 2r + n - r - q + 2d/q$, $f = 2q(n-r)$ en $d = \rho_1^2(1-\rho_1^2)^{-1}n$.

Bewys.

Indien P van rang een is, bestaan 'n unitêre matriks N sodanig dat

$$N P \overline{N}' = \begin{pmatrix} \rho_1^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Die tweede term in 8.3.1 kan derhalwe geskrywe word

$(1-\rho_1^2)^n (P(\chi^2_{f+2} \leq z) - P(\chi^2_f \leq z)) \Sigma_k (n)_k \omega_{1k} \rho_1^{2k}/k!.$

Laat $\omega_{1d}=0$ (d enige heelgetal) en los op vir ρ, d.i.

$$\rho = 1 + (n-r-q)/2r + d/rq.$$

ω_{1k} word nou

$$\omega_{1k} = 2(n-r)(d-k)/a, \quad a = 2\rho r.$$

Bostaande term is dus nul indien

$$d = n\rho_1^2(1-\rho_1^2)^{-1}$$

en dus die afleiding.

Stelling 8.3.2

Die asimptotiese verdeling van $|I-R|$ word gegee deur

8.3.4 $P(-a\log|I-R| \leq z) = |I-P|^n\Sigma_k\Sigma_K P(\chi^2_{f_k}\leq z)[n]_K\bar{C}_K(P)/k! +$

$$|I-P|^n\Sigma_k\Sigma_K(P(\chi^2_{f_k+2}\leq z)-P(\chi^2_{f_k}\leq z))[n]_K\omega_{1k}\bar{C}_K(P)/k!$$

$$+ O(n-r)^{-2},$$

waar $a = 2(n-r)\rho$, $\rho = 1 + (r-q)/2(n-r)$, $f_k = 2(rq+k)$ en $\omega_{1k} = (-1/\rho)((1-\rho+r/(n-r))k + (\Sigma_j k_j{}^2-2\Sigma_j k_j j+k)/(n-r))$.

Bewys.

Volgens 8.1.5 kan die karakteristieke funksie van ρM, $M = -2\log|I-R|^{n-r}$, geskrywe word

$$\phi_{\rho M}(t) = |I-P|^n\Sigma_k\Sigma_K[n]_K\bar{\Gamma}_q(n,K)\bar{\Gamma}_q((n-r)(1-2it\rho))/(\bar{\Gamma}_q(n-r)$$

$$\bar{\Gamma}_q((n-r)(1-2it\rho)+r,K))\ \bar{C}_K(P)/k!.$$

Hierdie voorskrif is egter soortgelyk as dié gegee in stelling 5.3.4 en derhalwe die stelling.

Afleiding 8.3.2

Indien P van rang een is, word die asimptotiese verdeling van $|I-R|$ gegee deur

8.3.5 $P(-a\log|I-R| \leq z) = \Sigma_k P(\chi^2_{f_k}\leq z)P(k) + \Sigma_k(P(\chi^2_{f_k+2}\leq z)-$

$$P(\chi^2_{f_k}\leq z))\omega_{1k}P(k) + O(n-r)^{-2}$$

waar $\omega_{1k} = (-1/\rho)((1-\rho+r/(n-r))k + (k^2-k)/(n-r))$, $P(k) = (1-\rho_1{}^2)^n(n)_k\rho_1{}^2/k!$ en die ander parameters gegee is in stelling 8.3.2.

Bewys.

Hierdie afleiding volg sondermeer uit stelling 8.3.2.

Stelling 8.3.3

Die verdelingsfunksie van $r_1{}^2$, die grootste kanoniese korrelasie koëffisiënt gekwadreer, word gegee deur

8.3.6/ ...

8.3.6 $$f(r_1^2) = \bar{\Gamma}_q(n)\bar{\Gamma}_q(q)/(\bar{\Gamma}_q(r)\bar{\Gamma}_q(r+q))\ |I-P|^n \Sigma_k \Sigma_K \Sigma_j \Sigma_J \Sigma_\delta g_{K,J}^{\delta}$$
$$r_1^{2(rq+k+j-1)}[n]_K[n]_K[r]_\delta[r-n+q]_J\bar{C}_K(P)\bar{C}_\delta(I_q)/($$
$$[r]_K[r+q]_\delta\bar{C}_K(I_q)k!j!),\quad 0<r_1^2<1.$$

Bewys.

Die bewys volg dieselfde patroon as die van stelling 8.2.3 met in agneming van die integraal 5.4.4.

- - - - -

SUMMARY.

NON-CENTRAL MULTIVARIATE BETA DISTRIBUTIONS.

Let the random matrices A and B be two independent Wishart variates. Let $L = (A+B)^{-1/2}A(A+B)^{-1/2}$ and $V = B^{-1/2}AB^{-1/2}$. This study concerns the non-central distributions of L and V, called the non-central multivariate beta distributions of the first and second kind respectively. A and B are first considered as real variables and then as complex variables.

The first chapter gives an introduction and some properties of hypergeometric functions of matrix argument and of the Wishart distribution.

In chapter II the distribution of L is derived. Asymptotic distributions for $|L|$ and $|I-L|$ are given and the exact distribution of the largest root of L is defined. The moments of trL and tr(I-L) are also derived. It is shown that the distribution of L can be written as the product of independent beta distributions of the first kind.

In chapter III the distribution of V is derived. Exact distributions for trV and trV^{-1} are defined and it is shown that the distribution of V can be written as the product of independent beta distributions of the second kind.

The non-central multivariate dirichlet distributions of the first and second kind are derived in chapter IV. An asymptotic distribution for $\prod_j |L_j|$ is given and the exact distribution of $\Sigma_j trV_j$ is derived.

In chapters V through VII the same is done as in the previous chapters, but in the complex case.

In chapter VIII certain aspects of the generalised multiple correlation matrix R are considered. The non-central distribution of the largest root of R is defined and asymptotic distributions for $|R|$ and $|I-R|$ are derived.

L I T E R A T U U R

ANDERSON, T.W. (1958) : An Introduction to Multivariate Statistical Analysis. Wiley, N.Y.

BOX, G.E.P. (1949) : A general distribution theory for a class of likelihood criteria. Biometrika, 36, 317-346.

CONSTANTINE, A.G. (1963) : Some non-central distribution problems in multivariate analysis. Ann. Math. Statist., 34, 1270-1285.

CONSTANTINE, A.G. (1966) : The distribution of Hotelling's generalised T_0^2. Ann. Math. Statist., 37, 215-225.

DEEMER, W.L. and OLKIN, I. (1951) : The jacobians of certain matrix transformations useful in multivariate analysis. Biometrika, 38, 345-367.

DE WAAL, D.J. : An Asymptotic distribution for the determinant of a non-central B Statistic in multivariate analysis. Aanvaar vir publikasie in S. Afr. Statist. J.

DE WAAL, D.J. (b) : The non-central multivariate Beta type 2 distribution. Aangebied vir publikasie in S. Afr. Statist. J.

GIRI, N. (1965) : On the complex analogues of T^2- and R^2- tests. Ann. Math. Statist., 36, 664-670.

GOODMAN, N.R. (1963) : Statistical analysis based on a certain multivariate complex Gaussian distribution. (An Introduction). Ann. Math. Statist., 34, 152-176.

GRAYBILL, F.A. (1961) : An Introduction to Linear Statistical Models. McGraw-Hill, N.Y.

HERZ, C.S. (1955) : Bessel function of matrix argument. Ann. Math., 61, 474-523.

HSU, P.L. (1939) : On the distribution of the roots of certain determinental equations. Ann. Eugen., 9, 250.

JAMES, A.T. (1954) : Normal multivariate analysis and the orthogonal group. Ann. Math. Statist., 25, 40-75.

JAMES, A.T. (1960) : The distribution of the latent roots of the covariance matrix. Ann. Math. Statist., 31, 151-158.

JAMES, A.T. (1961)(a) : Zonal polynomials of the real positive definite symmetric matrices. Ann.Math., 74, 456-469.

JAMES, A.T. (1961)(b) : The distribution of non-central means with known covariance. Ann. Math. Statist., 32, 874-882.

JAMES, A.T. (1964) : Distribution of matrix variates and latent roots derived from normal samples. Ann. Math. Statist., 35, 475-501.

KHATRI, C.G. (1959) : On the mutual independence of certain statistics. Ann. Math. Statist., 30, 1258-1262.

KHATRI, C.G. (1964)(a) : Distribution of the largest or the smallest characteristic root under null Hypothesis concerning complex multivariate normal populations. Ann. Math. Statist., 35, 1807-1810.

KHATRI, C.G. (1964)(b) : Distribution of the "Generalised" multiple correlation matrix in the dual case. Ann. Math. Statist., 35, 1801-1806.

KHATRI, C.G. (1965) : Classical Statistical analysis based on a certain multivariate complex Gaussian distribution. Ann. Math. Statist., 36, 261-269.

KHATRI, C.G. (1967) : Some distribution problems connected with the characteristic roots of $S_1S_2^{-1}$. Ann. Math. Statist., 38, 944-948.

KHATRI, C.G. and PILLAI, K.C.S. (1965) : Some results on the non-central multivariate Beta distribution and moments of traces of two matrices. Ann. Math. Statist., 36, 1511-1520

KHATRI, C.G. and PILLAI, K.C.S. (1968) : On the non-central distribution of two tests criteria in multivariate analysis of variance. Ann. Math. Statist., 39, 215-226.

KSHIRSAGAR, A.M. (1961) : The non-central multivariate Beta distribution. Ann. Math. Statist., 32, 104-111.

OLKIN, I. and RUBIN, H. (1964) : Multivariate Beta distributions and independence properties of the Wishart distributions. Ann. Math. Statist., 35, 261-269.

PILLAI, K.C.S. (1955) : Some new test criteria in multivariate analysis. Ann. Math. Statist., 26, 117-121.

PILLAI, K.C.S. (1960) : Statistical Tables for Tests of Multivariate Hypothesis. The Statistical Center, University of the Philippines, Manila.

PILLAI, K.C.S. (1967)(a) : On the distribution of the largest root of a matrix in multivariate analysis. Ann. Math. Statist., 38, 616-617.

PILLAI, K.C.S. (1967)(b) : Upper percentage points of the largest root of a matrix in multivariate analysis. Biometrika, 54, 189-194.

PILLAI, K.C.S. and JAYACHANDRAN, K. (1967) : Power comparisons of tests of two multivariate hypotheses based on four criteria. Biometrika, 54, 195-210.

ROY, J. (1965) : Power of the likelihood-ratio test used in analysis of dispersion. Multivariate Analysis. (Krishnaiah, P.R. (1966)). Academic Press, N.Y.

ROY, S.N. (1945) : The individual sampling distribution of the maximum, the minimum and any intermediate of p- Statistics on the null hypotheses. Sankhyā, 7, 133-158.

RUBIN, H. (1962) : Probability content of regious under spherical normal distributions IV. The distribution of homogeneous and non-homogeneous quadratic forms of normal variables. Ann. Math. Statist., 33, 542-570.

SRIVASTAVA, M.S. (1968) : On the distribution of a multiple correlation matrix; non-central multivariate beta distributions. Ann. Math. Statist., 39, 227-232.

SUGIYAMA, T. (1966) : On the distribution of the largest latent root and the corresponding latent vector for principal component analysis. Ann. Math. Statist., 37, 995-1001.

SUGIYAMA, T. (1967) : Distribution of the largest root and the smallest root of the generalised B Statistic and F Statistics in multivariate analysis. Ann. Math. Statist., 38, 1152-1159.

TROSKIE, C.G. (1966) : Nie-sentrale meer veranderlike Betaverdelings. Tydskrif vir Natuurwetenskappe, 6, 58-71.

TROSKIE, C.G. (1967) : Non-central multivariate Dirichlet distributions. S.A. Statist. Journal, 1, 21-32.

TROSKIE, C.G. (1968) : The generalised multiple correlation matrix. Aangebied vir publikasie in S. Afr. Statist. J.

WILKS, S.S. (1932) : Certain generalizations in the analysis of variance. Biometrika, 24, 471-494.

WILKS, S.S. (1962) : <u>Mathematical Statistics</u>. Wiley, N.Y.